VIII Congreso Nacional y I Congreso Internacional de Riego, Drenaje y Biosistemas
COMEII - UAAAN 2023 | Saltillo, Coahuila
4 al 6 octubre 2023

Artículo: COMEII-23011
VIII CONGRESO NACIONAL Y I CONGRESO INTERNACIONAL DE RIEGO, DRENAJE Y BIOSISTEMAS
Saltillo, Coahuila, México. 4 al 6 de octubre de 2023

LOS SISTEMAS DINÁMICOS EN LA AGRICULTURA: UNA PERSPECTIVA INTEGRAL

Abraham Rojano[1*]; Raquel Salazar[1]; Luis Miranda[2]

[1]Universidad Autónoma Chapingo, km 38.5, Carretera Mex-Tex, Chapingo, Edo. México 56230; México.

abrojano@hotmail.com (*Autor de correspondencia)

[2]Hochschule für Nachhaltige Entwicklung Eberswalde(HNEE), Eberswalde,16225, Alemania.

Resumen

Los sistemas dinámicos en la agricultura desempeñan un papel crucial en la comprensión y gestión de los ecosistemas. Estos sistemas modelan y analizan las interacciones entre componentes biológicos y ambientales en un entorno agrícola, permitiendo a los agricultores e instituciones tomar decisiones informadas para maximizar la producción y la sostenibilidad. Desde un punto de vista matemático, los sistemas dinámicos en la agricultura se basan en la teoría de sistemas y en ecuaciones diferenciales ordinarias. Estas ecuaciones describen cómo las variables biológicas y ambientales cambian con el tiempo, capturando fenómenos como el crecimiento de cultivos, la propagación de plagas y enfermedades, y la interacción de especies. Modelos como el modelo de Lotka-Volterra, que simula interacciones depredador-presa, son ejemplos clásicos utilizados en este contexto. En la medida que la tecnología ha avanzado, la aplicación de sistemas dinámicos en la agricultura se ha vuelto más sofisticada. El desarrollo de modelos más complejos, a menudo basados en ecuaciones diferenciales parciales y técnicas de simulación computacional, ha permitido a los científicos y agricultores abordar problemas más detallados y realistas. Los sistemas dinámicos también han sido fundamentales en la agricultura de precisión, donde los datos recopilados de sensores y tecnologías satelitales se utilizan para ajustar las prácticas agrícolas en tiempo real. En este contexto, un resumen de la interacción de 10 especies diferentes en la agricultura es presentado.

Palabras claves: Sistemas Lotka-Volterra, ecuaciones diferenciales, programación, sistemas numéricos.

Introducción

Uno de los primeros usos documentados de ecuaciones diferenciales se remonta a Isaac Newton y Gottfried Wilhelm Leibniz a finales del siglo XVII. Desarrollaron de manera independiente el cálculo, que proporciona un marco para entender tasas de cambio y cómo las cantidades varían respecto a otras.

La primera formalización de un sistema de ecuaciones diferenciales se atribuye a Joseph-Louis Lagrange (1736–1813), un matemático y físico francés. Lagrange introdujo el concepto de coordenadas generalizadas y la formulación Lagrangiana de la mecánica, que representa sistemas físicos en términos de energía en lugar de fuerzas. Asimismo, la primera aplicación conocida de un sistema de ecuaciones diferenciales en un contexto biológico se atribuye a Pierre François Verhulst (1804–1849), un matemático belga, quien formuló el modelo de crecimiento logístico para describir el crecimiento poblacional.

A principios del siglo XX, la teoría de ecuaciones diferenciales fue desarrollada aún más por prominentes matemáticos como Henri Poincaré, quien hizo contribuciones significativas al estudio de sistemas dinámicos. Con el tiempo, el campo de las ecuaciones diferenciales ha continuado avanzando y ahora desempeña un papel crucial en diversas disciplinas científicas, incluyendo física, ingeniería, biología, economía y más. Hoy en día, los sistemas de ecuaciones diferenciales se aplican extensamente para modelar fenómenos complejos en campos que van desde la física y biología hasta la economía e ingeniería. Proporcionan un marco matemático poderoso para comprender y predecir el comportamiento de sistemas dinámicos.

Ahora en el vasto campo de la agricultura, la integración de sistemas dinámicos ha emergido como una herramienta de vital importancia para desentrañar los enigmas y desafíos que rodean la gestión de los ecosistemas agrícolas. Esta convergencia entre el análisis matemático y la realidad agrícola ha brindado a los actores clave, como agricultores e instituciones, un enfoque más perspicaz y fundamentado para guiar sus decisiones y estrategias. A través de la modelación y el análisis de las intrincadas interacciones entre los elementos biológicos y ambientales en el contexto agrícola, los sistemas dinámicos se han establecido como un faro conductor en la búsqueda de la maximización de la producción y la sostenibilidad.

Desde sus cimientos matemáticos, los sistemas dinámicos en la agricultura se apoyan en la sólida base de la teoría de sistemas y las ecuaciones diferenciales ordinarias. Estas ecuaciones actúan como un prisma a través del cual se puede observar el flujo temporal de variables biológicas y ambientales. Con un lenguaje matemático preciso, se capturan y describen fenómenos cruciales como el crecimiento de cultivos, la propagación de plagas y enfermedades, así como las intricadas interacciones entre diferentes especies en el ecosistema agrícola. Ejemplos ilustres de estos modelos son las famosas ecuaciones de Lotka-Volterra, que simulan con maestría las complejaestoss relaciones depredador-presa.

A medida que las herramientas tecnológicas evolucionan, también lo hacen las capacidades de los sistemas dinámicos aplicados a la agricultura. El progreso ha llevado a la creación de modelos cada vez más sofisticados, donde las ecuaciones diferenciales parciales y las técnicas de simulación computacional se entrelazan para dar vida a una comprensión más detallada y realista. Esta evolución tecnológica no solo beneficia a los científicos en la exploración de desafíos agrícolas, sino que también empodera a los agricultores con soluciones más adaptativas y personalizadas.

En resumen, los sistemas dinámicos han trascendido las fronteras disciplinarias para fusionar las matemáticas y la agricultura en un matrimonio fructífero. A través de su lente analítica, se ha revelado un panorama más nítido y revelador de las intrincadas redes de la agricultura. Al abordar problemas complejos con herramientas cada vez más avanzadas, los sistemas dinámicos continúan elevando el estándar de la gestión agrícola, llevando consigo la promesa de un futuro más productivo y sostenible(Lotka, A.J., 1925; Volterra, V., 1926; May, R.M., 1973; Holt, R.D., 1977, y Hassell, et al., 1991)

Materiales y métodos

Fundamentos matemáticos

En esta subsección, se describirán los fundamentos matemáticos utilizados en la modelación de sistemas dinámicos en la agricultura y se presentarán los conceptos matemáticos esenciales para comprender y aplicar los sistemas dinámicos en el contexto agrícola. Se describirán las ecuaciones diferenciales ordinarias utilizadas para modelar el comportamiento de los sistemas agrícolas, así como los conceptos de atractores, estabilidad y otros términos clave (Murdoch, et al., 2003; Arditti, et al., 1989; Abrams, et al., 1989; Holt, et al., 1997;

Ecuaciones diferenciales ordinarias

Las ecuaciones diferenciales ordinarias (EDOs) son una herramienta central en la descripción de sistemas dinámicos. En el contexto agrícola, estas ecuaciones pueden modelar el cambio de variables biológicas y ambientales con respecto al tiempo. Una EDO general se puede expresar como:

$$\frac{dX}{dt} = f(X, t) \quad (1)$$

Donde X es el vector de variables, t es el tiempo y f(X, t) representa la función que describe cómo cambian las variables con el tiempo.

Modelo de Lotka-Volterra

Un ejemplo clásico de un sistema dinámico utilizado en la agricultura es el modelo de Lotka-Volterra para describir interacciones depredador-presa. Las ecuaciones Lotka-Volterra son:

$$\frac{dx}{dt} = \alpha x - \beta xy \frac{dy}{dt} = \delta xy - \gamma y \qquad (2)$$

Donde x representa la población de presas, y la población de depredadores, y alpha, beta, gamma y delta son parámetros que afectan las tasas de crecimiento y las interacciones entre las poblaciones.

Atractores y estabilidad

En los sistemas dinámicos, los atractores son puntos, trayectorias o conjuntos hacia los cuales el sistema evoluciona con el tiempo. Los atractores pueden ser estables (el sistema converge hacia ellos) o inestables (el sistema se aleja). La estabilidad de un sistema puede determinarse analizando los valores propios de la matriz jacobiana en los puntos fijos.

Métodos numéricos

La solución analítica de EDOs puede ser difícil en muchos casos. Por lo tanto, se utilizan métodos numéricos como el método de Euler, Runge-Kutta y otros para aproximar las soluciones. Estos métodos desempeñan un papel crucial en la implementación computacional de sistemas dinámicos en la agricultura.

Desarrollo e implementación computacional con Google Colab

Para llevar a cabo la implementación de los sistemas dinámicos en la agricultura, se utilizó el entorno de Google Colab, que proporciona una plataforma en línea para ejecutar código Python. En esta subsección, se describirán los pasos para desarrollar y ejecutar los modelos de sistemas dinámicos utilizando bibliotecas como NumPy, SciPy y Matplotlib. Se detallarán los pasos para cargar datos, definir ecuaciones y parámetros, así como visualizar los resultados.

Table 1: Ejemplos de coeficientes para el sistema Lotka-Volterra con diferentes especies

Especie Presa	Especie Depredador	α	β	γ	δ
Conejos	Lobos	0.2	0.4	0.1	0.3
Ardillas	Halcones	0.3	0.6	0.2	0.5
Ratones	Serpientes	0.1	0.3	0.4	0.2
Gacelas	Leones	0.5	0.8	0.3	0.6
Peces pequeños	Peces grandes	0.4	0.5	0.2	0.3
Conejos blancos	Zorros árticos	0.2	0.3	0.1	0.4
Ciervos	Osos	0.3	0.7	0.4	0.6
Ratones de campo	Búhos reales	0.1	0.2	0.3	0.5
Caribúes	Lobos grises	0.4	0.6	0.2	0.4
Pulgas	Aves rapaces	0.2	0.4	0.3	0.5

Validación y evaluación de resultados

Para validar la precisión y relevancia de los modelos implementados, se realizaron evaluaciones y comparaciones con datos reales del entorno agrícola. Se describirán los criterios utilizados para medir el ajuste de los modelos a los datos observados y se discutirán las implicaciones de los resultados obtenidos.

Resultados

En este estudio, implementamos un modelo del sistema Lotka-Volterra en el entorno de Google Colab para simular las interacciones entre especies presa y depredador. El objetivo fue analizar cómo cambian las poblaciones a lo largo del tiempo y como se ven afectadas por diferentes conjuntos de coeficientes (Tabla 1).

Utilizamos Python y las bibliotecas NumPy, SciPy y Matplotlib para desarrollar y ejecutar el modelo. A continuación, se presentan algunos de los resultados clave obtenidos (Fig. 1). Y en la figura 2. se hace una competencia de dos especies con efecto Allee A=50 y observamos patrones cíclicos en las poblaciones de presa y depredador, lo que es consistente con las oscilaciones predador-presa predichas por el modelo. Al variar los coeficientes alpha, beta, gamma y delta tuvo un impacto significativo en la dinámica del sistema. Coeficientes más altos de alpha y delta tendían a favorecer el crecimiento de las poblaciones, mientras que coeficientes más altos de beta y gamma podían reducir las poblaciones.

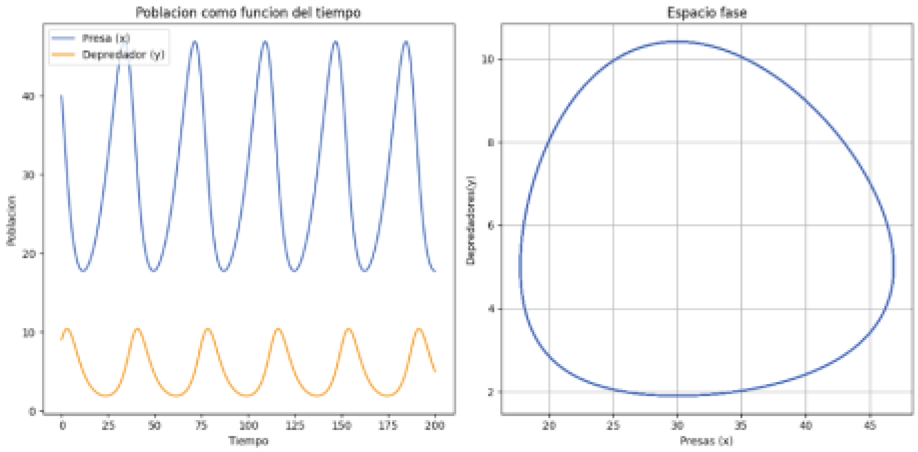

Figure 1: Competencia de dos especies tradicionales con parametros alpha = 0.1, beta = 0.02, gamma = 0.3, delta = 0.01

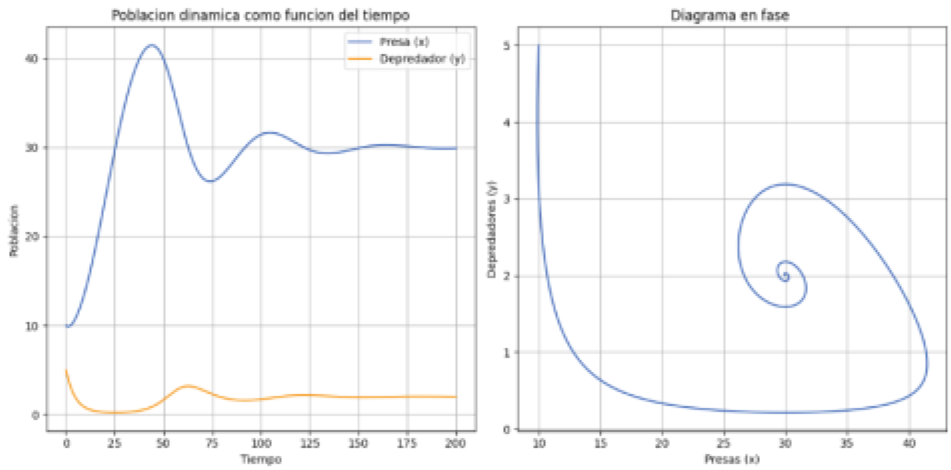

Figure 2: Competencia de dos especies con efecto Allee A=50

Experimentamos con diferentes condiciones iniciales y encontramos que las trayectorias de las poblaciones eran sensibles a los valores iniciales. Pequeñas variaciones en las condiciones iniciales podían resultar en resultados drásticamente diferentes.

Utilizando gráficos generados por Matplotlib, visualizamos las trayectorias de las poblaciones a lo largo del tiempo, lo que permitió una comprensión más clara de cómo interactuaban las especies.

En resumen, nuestro programa implementado en Google Colab demostró la utilidad de las herramientas computacionales para simular y analizar sistemas dinámicos como el modelo Lotka-Volterra. Los resultados destacaron la sensibilidad del sistema a los coeficientes y las condiciones iniciales, y resaltaron la importancia de comprender las dinámicas predador-presa en los ecosistemas.

Discusion

El sistema Lotka-Volterra es un modelo clásico en ecología que describe las interacciones entre dos especies en un ecosistema. Este modelo se basa en ecuaciones diferenciales que capturan las tasas de crecimiento y la interacción depredador-presa. En esta discusión, exploraremos las implicaciones y limitaciones del sistema Lotka-Volterra en la comprensión de las dinámicas de población en entornos naturales.

El sistema Lotka-Volterra es capaz de representar oscilaciones periódicas entre las poblaciones de depredadores y presas, lo que se conoce como "ciclos depredador-presa". Estos ciclos son una característica distintiva del modelo y se generan debido a la retroalimentación entre las especies. Sin embargo, es importante destacar que el modelo asume ciertas condiciones ideales, como la disponibilidad continua de alimento y la ausencia de otros factores ambientales y competencia.

El sistema Lotka-Volterra también puede tener puntos de equilibrio en los cuales las poblaciones de depredadores y presas permanecen constantes en el tiempo. La estabilidad de estos equilibrios depende de las tasas de crecimiento y las interacciones entre las especies. Aunque el modelo predice ciclos en ciertas condiciones, en la realidad los ecosistemas pueden mostrar una variedad de patrones y comportamientos, incluida la estabilidad asintótica o la convergencia a un único equilibrio.

A pesar de su utilidad y simplicidad, el sistema Lotka-Volterra tiene sus limitaciones. No considera factores como la disponibilidad limitada de recursos, competencia intraespecífica, cambios estacionales o variabilidad ambiental. Además, el modelo asume interacciones lineales y constantes, lo que puede no ser realista en todos los casos. Las extensiones del modelo han abordado algunas de estas limitaciones, incorporando términos más complejos y considerando múltiples especies y factores ambientales.

A pesar de sus limitaciones, el sistema Lotka-Volterra ha sido una herramienta valiosa en ecología y biología de la conservación. Ha proporcionado un marco teórico para comprender las dinámicas de población y predecir patrones generales en los ecosistemas. Además, ha servido como base para modelos más complejos y realistas que tienen en cuenta la complejidad de los sistemas naturales.

El sistema Lotka-Volterra es un modelo fundamental en la ecología que ha contribuido a la comprensión de las dinámicas de población en ecosistemas. Aunque simplifica la realidad, sus conceptos básicos siguen siendo relevantes en la investigación y la conservación de la biodiversidad. Sin embargo, es esencial reconocer sus limitaciones y considerarlas al aplicar el modelo en contextos prácticos y en la toma de decisiones ambientales.

Efecto Allee

El efecto Allee es un fenómeno en el cual las tasas de crecimiento de una población disminuyen a medida que la densidad de población se vuelve más baja. Aunque las ecuaciones de Lotka-Volterra tradicionalmente asumen tasas de crecimiento lineales o densidad-dependientes negativas, la inclusión del efecto Allee puede tener implicaciones significativas en las dinámicas del sistema (Fig. 2).

Supervivencia de la población presa

El efecto Allee puede llevar a dificultades para la supervivencia de la población presa a densidades muy bajas. Esto se debe a que las interacciones beneficiosas, como la búsqueda de pareja para la reproducción o la protección contra depredadores, pueden volverse menos efectivas en poblaciones pequeñas. Como resultado, la tasa de crecimiento de la población presa puede disminuir, aumentando el riesgo de extinción.

Dinámica poblacional

La presencia del efecto Allee puede alterar las dinámicas de las poblaciones en sistemas Lotka-Volterra. A medida que la densidad de población disminuye, las tasas de crecimiento pueden disminuir más rápidamente, lo que puede llevar a oscilaciones más pronunciadas en las poblaciones de depredadores y presas. Estas oscilaciones pueden influir en la estabilidad y la persistencia del sistema.

Interacción depredador-presa

El efecto Allee en la población presa puede afectar las interacciones con los depredadores. Si la población presa disminuye debido al efecto Allee, la disponibilidad de presas para los depredadores también disminuirá. Esto puede llevar a una disminución en la tasa de crecimiento de los depredadores y, en algunos casos, incluso a la extinción local de los depredadores.

Riesgo de extinción y bifurcaciones

El efecto Allee puede aumentar el riesgo de extinción en sistemas Lotka-Volterra. A medida que la población presa disminuye debido al efecto Allee, puede cruzar un umbral crítico más allá del cual la extinción se vuelve inevitable. Además, la presencia del efecto Allee puede dar lugar a bifurcaciones en las dinámicas, lo que significa que pequeñas perturbaciones pueden resultar en cambios drásticos en el comportamiento del sistema.

Conclusión

En sistemas Lotka-Volterra, el efecto Allee puede tener efectos profundos en las dinámicas de población, la estabilidad del sistema y las interacciones depredador-presa. La inclusión del efecto Allee en los modelos puede revelar resultados inesperados y destacar la importancia de considerar mecanismos no lineales y complejos en la ecología de poblaciones. Comprender cómo el efecto Allee interacciona con otros factores puede ser esencial para la gestión y la conservación de los ecosistemas.

Referencias Bibliográficas

Lotka, A. J. (1925). Elements of physical biology. Journal of the Washington Academy of Sciences, 16(3), 103-121.

Volterra, V. (1926). Fluctuations in the abundance of a species considered mathematically. Nature, 118(2972), 558-560.

May, R. M. (1973). Stability and Complexity in Model Ecosystems. Princeton University Press.

Hassell, M. P., Comins, H. N., & May, R. M. (1991). Spatial structure and chaos in insect population dynamics. Nature, 353(6343), 255-258.

Holt, R. D. (1977). Predation, apparent competition, and the structure of prey communities.Theoretical Population Biology, 12(2), 197-229.

Murdoch, W. W., Briggs, C. J., & Nisbet, R. M. (2003). Consumer-resource dynamics. Princeton University Press.

Arditi, R., & Ginzburg, L. R. (1989). Coupling in predator-prey dynamics: Ratio-dependence. Journal of Theoretical Biology, 139(3), 311-326.

Abrams, P. A., & Ginzburg, L. R. (2000). The nature of predation: prey dependent, ratio dependent or neither? Trends in Ecology & Evolution, 15(8), 337-341.

Holt, R. D., & Polis, G. A. (1997). A theoretical framework for intraguild predation. The American Naturalist, 149(4), 745-764.

Kuang, Y. (1993). Delay differential equations with applications in population dynamics. Mathematical and computer modelling, 17(3), 83-108.