



SOBRE LA INFILTRACIÓN FRACCIONARIA

Fuentes Carlos^{1*}; Alcántara-López Fernando²; Fuentes-Morales Daniel¹

¹Instituto Mexicano de Tecnología del Agua. Paseo Cuauhnáhuac Núm. 8530, col. Progreso, Jiutepec, Morelos. C.P. 62550.

cfuentes@tlaloc.imta.mx (*Autor de correspondencia)

²Departamento de Matemáticas. Facultad de Ciencias. Universidad Nacional Autónoma de México. Circuito Exterior S/N, ciudad de México, México.

Resumen

Se presentan las ecuaciones diferenciales, que resultan de los principios de conservación de la masa y de cantidad de movimiento a través de la ley de Darcy, para describir los procesos de transferencia de masa y energía en el suelo especialmente en el fenómeno de la infiltración. En particular se considera la ecuación diferencial en la cual el espacio es una función de la cantidad de agua y del tiempo, en lugar de que la cantidad de agua es función del espacio y del tiempo, tal y como fue considerado por Philip para deducir la solución en serie en la raíz cuadrada del tiempo, válida en tiempos cortos. En la ecuación diferencial la derivada parcial entera del espacio con respecto al tiempo se reemplaza por una derivada fraccionaria en el sentido de Caputo para tomar en cuenta los procesos de memoria en el tránsito del agua a través del medio poroso. Con estas consideraciones se ha deducido una solución en serie del fenómeno de la infiltración, pero en función del tiempo elevado a la mitad del orden fraccionario de la derivada temporal; cuando este orden es la unidad se obtiene como caso particular la solución clásica de Philip. Para extender la ecuación diferencial fraccionaria temporal así deducida a todo tiempo de la infiltración, se han retomado y adaptados los conceptos de la teoría clásica de Parlange para deducir soluciones aproximadas, pero de alto grado de precisión de la ecuación de infiltración fraccionaria o anómala. La ecuación de la infiltración anómala aproximada resultante es resuelta en serie para los tiempos cortos, sin embargo, se requieren métodos numéricos para su solución en todo tiempo; cuestión que abre una línea de investigación. No obstante, se presenta una primera ilustración gráfica de la infiltración anómala cuando varía el orden de la derivada fraccionaria temporal.

Palabras claves: Tiempos cortos, solución en serie, teoría de Parlange generalizada

Introducción

La ecuación diferencial que describe el fenómeno de la infiltración vertical en un suelo homogéneo es el resultado de la ecuación de continuidad y la ley de Darcy (1856):

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} = -\frac{\partial q}{\partial z}, \quad q(z, t) = -D(\theta) \frac{\partial \theta}{\partial z} + K(\theta) \quad (1)$$

a saber:

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial z} \left[D(\theta) \frac{\partial \theta}{\partial z} \right] - \frac{dK}{d\theta} \frac{\partial \theta}{\partial z} \quad (2)$$

donde $\theta = \theta(z, t)$ es el contenido volumétrico de agua, $q(z, t)$ el flujo de Darcy, z la coordenada vertical orientada positivamente hacia abajo, t el tiempo, $D(\theta)$ la difusividad hidráulica y $K(\theta)$ la conductividad hidráulica.

La ecuación (2) se sujeta a las condiciones inicial y en las fronteras siguientes:

$$t = 0, \quad \theta = \theta_0, \quad z > 0 \quad (3)$$

$$t > 0, \quad \theta = \theta_s, \quad z = 0 \quad (4)$$

$$t > 0, \quad \theta = \theta_0, \quad z \rightarrow \infty \quad (5)$$

donde θ_0 es el contenido volumétrico inicial de agua y θ_s el contenido volumétrico de agua a saturación.

La solución de Philip (1957) es construida sin embargo al considerar que existe la función implícita $z = z(\theta, t)$ asegurada por las condiciones inicial y en las fronteras. Utilizando la identidad $(\partial \theta / \partial t)_z = -(\partial z / \partial t)_\theta / (\partial z / \partial \theta)_t$, donde los subíndices son las variables que permanecen constantes en la diferenciación, el sistema definido por las ecuaciones (1) y (2) se transforma en:

$$\frac{\partial z}{\partial t} = -\frac{\partial q}{\partial \theta}, \quad q(\theta, t) = -\frac{D(\theta)}{\partial z / \partial \theta} + K(\theta) \quad (6)$$

$$\frac{\partial z}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial \theta} \left[\frac{D(\theta)}{\partial z / \partial \theta} \right] = \frac{dK}{d\theta} \quad (7)$$

La solución en tiempos cortos se desarrolla en una serie de potencias de la raíz cuadrada del tiempo:

$$z(\theta, t) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(\theta) t^{\frac{n}{2}} \quad (8)$$

de radio de convergencia desconocido.

La serie es la generalización de la solución de la infiltración horizontal o absorción $z(\theta, t) = \phi(\theta)\sqrt{t}$, descrita por la ecuación (7) sin el término proveniente del campo gravitacional $dK/d\theta$, donde $\phi(\theta)$ es la variable de Boltzmann definida por la ecuación:

$$\frac{1}{2}\phi + \frac{d}{d\theta} \left[\frac{D(\theta)}{\partial\phi/\partial\theta} \right] = 0 \quad (9)$$

sujeta a las condiciones

$$\phi(\theta_s) = 0, \quad \phi(\theta_0) \rightarrow \infty \quad (10)$$

Teoría

Remplazando la derivada temporal entera por una derivada fraccional, la ecuación (6) de continuidad se escribe como:

$$\tau_c^{\nu-1} \frac{\partial^\nu z}{\partial t^\nu} = -\frac{\partial q}{\partial \theta} \quad (11)$$

donde ν es el orden de la derivada fraccional y τ_c es una escala de tiempo introducida para que las dimensiones sean congruentes.

Considerando la ley de Darcy, ecuación (6), la ecuación diferencial que describe la infiltración fraccional es la siguiente

$$\tau_c^{\nu-1} \frac{\partial^\nu z}{\partial t^\nu} + \frac{\partial}{\partial \theta} \left[\frac{D(\theta)}{\partial z/\partial \theta} \right] = \frac{dK}{d\theta} \quad (12)$$

sujeta a las condiciones iniciales y en las fronteras definidas por las ecuaciones (3), (4) y (5).

Para definir la derivada fraccional se introduce la integral fraccional de Riemann-Liouville:

$$I_a^\nu f(t) = \frac{1}{\Gamma(\nu)} \int_a^t (t-\tau)^{\nu-1} f(\tau) d\tau \quad (13)$$

La derivada fraccional de Riemann-Liouville de orden ν está definida por:

$${}^{RL}D_a^\nu f(t) = (D^n I_a^{n-\nu} f)(t), \quad n-1 < \nu < n \quad (14)$$

y la derivada fraccional de Caputo-Liouville de orden ν :

$${}^{CL}D_0^\nu f(t) = (I_a^{n-\nu} D^n f)(t), \quad n-1 < \nu < n \quad (15)$$

En la infiltración $a = 0$, cuando $0 < \nu < 1$ se tiene $n = 1$ y cuando $1 < \nu < 2$ se tiene $n = 2$. Se puede mostrar mediante la regla de Leibniz que las dos derivadas están relacionadas por:

$${}^{RL}D_0^\nu f(t) = {}^{CL}D_0^\nu f(t) + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{f^{(k)}(0)}{\Gamma(1+k-\nu)t^{\nu-k}}, \quad n-1 < \nu < n \quad (16)$$

con

$${}^{RL}D_0^\nu f(t) = \frac{1}{\Gamma(n-\nu)} \frac{d^n}{dt^n} \int_a^t (t-\tau)^{n-1-\nu} f(\tau) d\tau \quad (17)$$

$${}^{CL}D_0^\nu f(t) = \frac{1}{\Gamma(n-\nu)} \int_a^t (t-\tau)^{n-1-\nu} \frac{d^n f(\tau)}{d\tau^n} d\tau \quad (18)$$

Las dos definiciones de derivadas son equivalentes para el caso en que $f^{(k)}(0) = 0$. Considerando el caso $n = 1$, cuando la función es una constante $f(t) = C \neq 0$ la derivada de Caputo-Liouville es ${}^{CL}D_0^\nu f(t) = 0$ mientras que la derivada de Riemann-Liouville es ${}^{RL}D_0^\nu f(t) = C / [\Gamma(1-\nu)t^\nu]$.

En el caso particular en que $n = 1$ las dos formulaciones:

$$\frac{\partial^\nu}{\partial t^\nu} z(\theta, t) = \frac{1}{\Gamma(1-\nu)} \frac{\partial}{\partial t} \int_0^t (t-\tau)^{-\nu} z(\theta, \tau) d\tau \quad (19)$$

$$\frac{\partial^\nu}{\partial t^\nu} z(\theta, t) = \frac{1}{\Gamma(1-\nu)} \int_0^t (t-\tau)^{-\nu} \frac{\partial}{\partial \tau} z(\theta, \tau) d\tau \quad (20)$$

son equivalentes en tiempos cortos ya que $z(\theta, 0) = 0$.

La integración de la ecuación de continuidad conduce a expresar el flujo de Darcy como sigue:

$$q(\theta, t) - K_0 = \tau_c^{\nu-1} \int_{\theta_0}^\theta \frac{\partial^\nu z}{\partial t^\nu} d\bar{\theta} \quad (21)$$

donde $K_0 = K(\theta_0)$ es la conductividad hidráulica inicial.

El flujo de infiltración se obtiene como el flujo de Darcy en la posición de entrada del agua al suelo, $q_s(t) = q(\theta_s, t)$:

$$q_s(t) - K_0 = \tau_c^{\nu-1} \int_{\theta_0}^\theta \frac{\partial^\nu z}{\partial t^\nu} d\bar{\theta} \quad (22)$$

La solución en tiempos cortos

La solución de la ecuación (12) se desarrolla, de manera análoga a la ecuación (8), en una serie de potencias de $t^{v/2}$:

$$z(\theta, t) = \sum_{n=1}^{\infty} f_{v,n}(\theta) t^{\frac{vn}{2}} \quad (23)$$

de donde:

$$\frac{\partial^v z}{\partial t^v} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\Gamma(1+\frac{1}{2}vn)}{\Gamma(1+\frac{1}{2}vn-v)} f_{v,n}(\theta) t^{\frac{vn}{2}-v} \quad (24)$$

$$\frac{\partial z}{\partial \theta} = \sum_{n=1}^{\infty} f'_{v,n}(\theta) t^{\frac{vn}{2}} \quad (25)$$

Las ecuaciones que definen los coeficientes de la serie se obtienen mediante la introducción de las ecuaciones (24) y (25) en la ecuación (12). Se muestran las dos primeras:

$$\tau_c^{v-1} \frac{\Gamma(1+\frac{1}{2}v)}{\Gamma(1-\frac{1}{2}v)} f_{v,1}(\theta) + \frac{d}{d\theta} \left[\frac{D(\theta)}{f'_{v,1}(\theta)} \right] = 0 \quad (26)$$

$$\tau_c^{v-1} \Gamma(1+v) f_{v,2}(\theta) = \frac{d}{d\theta} \left[D(\theta) \frac{f'_{v,2}(\theta)}{f'_{v,1}(\theta)} \right] + \frac{dK}{d\theta} \quad (27)$$

Se hace notar que con $v = 1$ la ecuación (26) se reduce a la ecuación (9) que define la variable de Boltzmann con $\phi(\theta) = f_{1,1}(\theta)$. Aún más, para el caso general las dos ecuaciones son equivalentes si se define:

$$f_{v,1}(\theta) = \left[\frac{\tau_c^{1-v} \Gamma(1-\frac{1}{2}v)}{2\Gamma(1+\frac{1}{2}v)} \right]^{\frac{1}{2}} \phi(\theta) \quad (28)$$

El flujo en la posición de entrada se obtiene mediante la sustitución de la ecuación (24) en la ecuación (22):

$$q_s(t) - K_0 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\Gamma(1+\frac{1}{2}vn)}{\Gamma(1+\frac{1}{2}vn-v)} \tau_c^{v-1} S_{v,n} t^{\frac{vn}{2}-v}, \quad S_{v,n} = \int_{\theta_0}^{\theta_s} f_{v,n}(\theta) d\theta \quad (29)$$

La lámina infiltrada acumulada se obtiene de la ecuación de continuidad

$$I(t) - \frac{K_0 \tau_c^{1-v}}{\Gamma(1+v)} t^v = \int_{\theta_0}^{\theta_s} z(\theta, t) d\theta \quad (30)$$

ya que

$$q_s(t) - K_0 = \tau_c^{\nu-1} \frac{d^\nu}{dt^\nu} \left[I(t) - \frac{K_0 \tau_c^{1-\nu}}{\Gamma(1+\nu)} t^\nu \right] \quad (31)$$

y considerando las ecuaciones (23) y (29)

$$I(t) - \frac{K_0 \tau_c^{1-\nu}}{\Gamma(1+\nu)} t^\nu = \sum_{n=1}^{\infty} S_{\nu,n} t^{\frac{\nu n}{2}} \quad (32)$$

Se debe notar que el primer coeficiente de la serie definida por la ecuación (32), considerando la ecuación (28), se relaciona con la sorbilidad de Philip como:

$$S_{\nu,1} = \left[\frac{\Gamma(1+\frac{1}{2}\nu n)}{\Gamma(1+\frac{1}{2}\nu n-\nu)} \right]^{\frac{1}{2}} S \quad (33)$$

Si $S_{\nu,1}$ y S son conocidos la escala de tiempo se puede calcular con la ecuación (33).

La solución en tiempos largos

En tiempos largos se tiene que $\partial z / \partial \theta \rightarrow \infty$ en $\theta = \theta_s$ y de acuerdo con la ley de Darcy $q_s \rightarrow K_s$, donde $K_s = K(\theta_s)$ es la conductividad hidráulica a saturación. Este resultado se deduce de la ecuación (22) considerando que el perfil de humedad se mueve con velocidad fraccionaria $\tau_c^{\nu-1} \partial^\nu z / \partial t^\nu = (K_s - K_0) / (\theta_s - \theta_0)$. Tomando la derivada en el sentido de Caputo-Liouville, esta velocidad se deduce de la ecuación (20) si:

$$z(\theta, t) = \zeta_\nu(\theta) + \frac{\tau_c^{1-\nu}}{\Gamma(1+\nu)} \left(\frac{K_s - K_0}{\theta_s - \theta_0} \right) t^\nu \quad (34)$$

donde $\zeta_\nu(\theta)$ es una función del contenido volumétrico de agua. Con $\nu = 1$ se obtiene el clásico perfil al infinito estudiado por Philip (1957).

La introducción de la ecuación (34) en la ecuación (30) proporciona el comportamiento asintótico de la lámina de agua infiltrada

$$I(t) = I_0 + \frac{\tau_c^{1-\nu}}{\Gamma(1+\nu)} K_s t^\nu, \quad I_0 = \int_{\theta_0}^{\theta_s} \zeta_\nu(\theta) d\theta \quad (35)$$

donde I_0 es la ordenada al origen de la lámina infiltrada.

La solución de Parlange a la fraccionaria

Para obtener una solución aproximada válida para todo tiempo se pueden seguir los trabajos de Parlange. Para empezar, se introduce el concepto de la relación de concentración de flujos acuñado por Philip de los trabajos de Parlange considerando para el caso fraccionario las ecuaciones (21) y (22):

$$F(\theta, t) = \frac{q(\theta, t) - K_0}{q_s(t) - K_0} = \tau_c^{\nu-1} \int_{\theta_0}^{\theta} \frac{\partial^\nu z}{\partial t^\nu} d\bar{\theta} / \tau_c^{\nu-1} \int_{\theta_0}^{\theta_s} \frac{\partial^\nu z}{\partial t^\nu} d\bar{\theta} \quad (36)$$

con $0 \leq F(\theta, t) \leq 1$.

Introduciendo la ley de Darcy en la ecuación (36) y realizando una primera integración se deduce el perfil de humedad:

$$z(\theta, t) = \int_{\theta_0}^{\theta_s} \frac{D(\bar{\theta})}{F(\bar{\theta}, t)[q_s(t) - K_0] - [K(\bar{\theta}) - K_0]} d\bar{\theta} \quad (37)$$

Llevando la ecuación (37) a la ecuación (30) se deduce la expresión de la lámina infiltrada

$$I(t) - \frac{K_0 \tau_c^{1-\nu}}{\Gamma(1+\nu)} t^\nu = \int_{\theta_0}^{\theta_s} \frac{(\theta - \theta_0) D(\theta)}{F(\theta, t)[q_s(t) - K_0] - [K(\theta) - K_0]} d\theta \quad (38)$$

En tiempos largos cuando el perfil de humedad se mueve con velocidad fraccionaria constante se deduce de la ecuación (36) que

$$\lim_{t \rightarrow \infty} F(\theta, t) = \frac{\theta - \theta_0}{\theta_s - \theta_0} \quad (39)$$

Se puede obtener una integración aproximada de la ecuación (38) si se acepta, como en el caso clásico, que la ecuación (39) es válida para todo tiempo y además se asume la relación entre la conductividad y difusividad de Parlange et al. (1982) siguiente:

$$\frac{K(\theta) - K_0}{K_s - K_0} = \left(\frac{\theta - \theta_0}{\theta_s - \theta_0} \right) \left[1 - \beta + \beta \int_{\theta_0}^{\theta} D(\bar{\theta}) d\bar{\theta} / \int_{\theta_0}^{\theta_s} D(\bar{\theta}) d\bar{\theta} \right] \quad (40)$$

El parámetro $0 < \beta < 1$ se puede calcular a partir de las características hidrodinámicas mediante la integración de la ecuación (40), es decir (Fuentes, 1989):

$$\beta = 2 - \int_{\theta_0}^{\theta} \left[\frac{K(\theta) - K_0}{K_s - K_0} \right] \left(\frac{\theta_s - \theta_0}{\theta - \theta_0} \right) D(\theta) d\theta / \int_{\theta_0}^{\theta_s} D(\theta) d\theta \quad (41)$$

El resultado de la integración de la ecuación (38) es:

$$I(t) - \frac{K_0 \tau_c^{1-\nu}}{\Gamma(1+\nu)} t^\nu = \frac{S^2}{2\beta(K_s - K_0)} \ln \left[1 + \beta \frac{K_s - K_0}{q_s(t) - K_s} \right] \quad (42)$$

donde se ha utilizado la aproximación siguiente de la sorbilidad (Parlange, 1975):

$$S^2 \approx 2(\theta - \theta_s) \int_{\theta_0}^{\theta_s} D(\theta) d\theta \quad (43)$$

Para el análisis de la ecuación (42) se introducen las siguientes variables adimensionales

$$t_* = \frac{2(K_s - K_0)^2}{S^2} t, \quad I_*(t_*) = \frac{2(K_s - K_0)}{S^2} \left[I(t) - \frac{K_0 \tau_c^{1-\nu}}{\Gamma(1+\nu)} t^\nu \right], \quad q_{s*}(t_*) = \frac{q_s(t) - K_0}{K_s - K_0}, \quad (44)$$

$$q_{S^*}(t_*) = \tau_{C^*}^{\nu-1} \frac{d^\nu I_*}{dt_*^\nu}, \quad \tau_{C^*} = \frac{2(K_S - K_0)^2}{S^2} \tau_C \quad (45)$$

de modo que:

$$\tau_{C^*}^{\nu-1} \frac{d^\nu I_*}{dt_*^\nu} = 1 + \frac{\beta}{\exp(\beta I_*) - 1} \quad (46)$$

Nótese que la relación entre la sorbilidad generalizada $S_{\nu,1}$ y la sorbilidad de Philip, considerando la escala de tiempo adimensional definida por la ecuación (45), queda definida por:

$$S_{\nu,1} = \left[\frac{\tau_{C^*}^{1-\nu} \Gamma(1-\frac{1}{2}\nu)}{2^{2-\nu} \Gamma(1+\frac{1}{2}\nu)} \right]^{\frac{1}{2}} \frac{S^{2-\nu}}{(K_S - K_0)^{1-\nu}} \quad (47)$$

La integración de la ecuación (46) para $\nu = 1$ conduce a la clásica ecuación de Parlange *et al.* (1982):

$$t_* = I_* - \frac{1}{1-\beta} \ln \left[\frac{1-(1-\beta) \exp(-\beta I_*)}{\beta} \right] \quad (48)$$

la cual para $\beta \rightarrow 0$ se reduce a la ecuación de Green y Ampt (1911):

$$I_* = t_* + \ln(1 + I_*) \quad (49)$$

y cuando $\beta \rightarrow 1$ a la de Talsma y Parlange (1972):

$$I_* = t_* + 1 - \exp(-I_*) \quad (50)$$

El comportamiento en tiempos cortos de la solución de Parlange es

$$I_* = \sqrt{2t_*} + \frac{1}{3}(2 - \beta)t_* + O(t_*^{3/2}) \quad (51)$$

mientras que en tiempos largos

$$I_* \sim t_* + \frac{1}{1-\beta} \ln \left(\frac{1}{\beta} \right) \quad (52)$$

en la cual se observa el comportamiento singular de la ecuación de Green y Ampt, $\beta \rightarrow 0$, de hecho, en este caso $I_* \sim t_* + \ln(t_*)$.

Para el caso general la integración fraccionaria de orden ν de la ecuación (46) proporciona:

$$I_*(t_*) = \frac{\tau_{C^*}^{1-\nu}}{\Gamma(1+\nu)} t_*^\nu + \beta \frac{\tau_{C^*}^{1-\nu}}{\Gamma(\nu)} \int_0^{t_*} \frac{(t_* - \tau_*)^{\nu-1}}{\exp[\beta I_*(\tau_*)] - 1} d\tau_* \quad (53)$$

La solución de la ecuación (53) requiere de métodos numéricos, sin embargo, se puede deducir el comportamiento de $I_*(t_*)$ en tiempos cortos. En efecto, se introduce en ambos miembros la serie definida por la ecuación (32), $I_*(t_*) = \sum_{n=1}^{\infty} S_{v,n}^* t_*^{nv/2}$ en escritura adimensional, y se identifican los coeficientes (ver anexo). Las expresiones para los cuatro primeros coeficientes son:

$$S_{v,1}^* = \left[\tau_{c_*}^{1-v} \frac{\Gamma(1-\frac{1}{2}v)}{\Gamma(1+\frac{1}{2}v)} \right]^{\frac{1}{2}} \quad (54)$$

$$S_{v,2}^* = \frac{\tau_{c_*}^{1-v} \Gamma(1-\frac{1}{2}v) (1-\frac{1}{2}\beta)}{\Gamma(1+\frac{1}{2}v) + \Gamma(1-\frac{1}{2}v) \Gamma(1+v)} \quad (55)$$

$$S_{v,3}^* = \frac{\tau_{c_*}^{1-v} \Gamma(1-\frac{1}{2}v) \Gamma(1+\frac{1}{2}v)}{\Gamma^2(1+\frac{1}{2}v) + \Gamma(1-\frac{1}{2}v) \Gamma(1+\frac{3}{2}v)} \left(\frac{\beta^2 S_{v,1}^*}{12} + \frac{S_{v,2}^{*2}}{S_{v,1}^{*3}} \right) \quad (56)$$

$$S_{v,4}^* = \frac{\tau_{c_*}^{1-v} \Gamma(1-\frac{1}{2}v) \Gamma(1+v)}{\Gamma(1+\frac{1}{2}v) \Gamma(1+v) + \Gamma(1-\frac{1}{2}v) \Gamma(1+2v)} \left(\frac{\beta^2 S_{v,2}^*}{12} + \frac{2S_{v,2}^* S_{v,3}^*}{S_{v,1}^{*3}} - \frac{S_{v,2}^{*3}}{S_{v,1}^{*4}} \right) \quad (57)$$

se debe notar que los coeficientes de la ecuación (51) se deducen de las ecuaciones (54) y (55) haciendo $v = 1$.

En tiempos largos se tendrá:

$$I_* = I_{0*} + \frac{\tau_{c_*}^{1-v}}{\Gamma(1+v)} t_*^v \quad (58)$$

la cual es la ecuación (35) en escritura adimensional, donde:

$$I_{*0} = \lim_{t_* \rightarrow \infty} \beta \frac{\tau_{c_*}^{1-v}}{\Gamma(v)} \int_0^{t_*} \frac{(t_* - \tau_*)^{v-1}}{\exp[\beta I_*(\tau_*)] - 1} d\tau_* \quad (59)$$

siempre y cuando el límite exista.

La Figura 1 muestra los primeros cuatro términos de la serie $I_*(t_*)$, $S_{v,n}^* t_*^{nv/2}$ para $n = 1, 2, 3, 4$ donde $S_{v,n}^*$ es como en ecuaciones (54)--(57). En particular, se puede observar que los dos primeros términos de la serie brindan la principal contribución a $I_*(t_*)$, por lo que se entiende que la aproximación a dos términos utilizada en la literatura se considera suficiente para aproximar la infiltración acumulada; sin embargo, es a partir del cuarto término que el aporte dado a $S_{v,n}^*$ es inferior a 5% del valor acumulado de la infiltración.

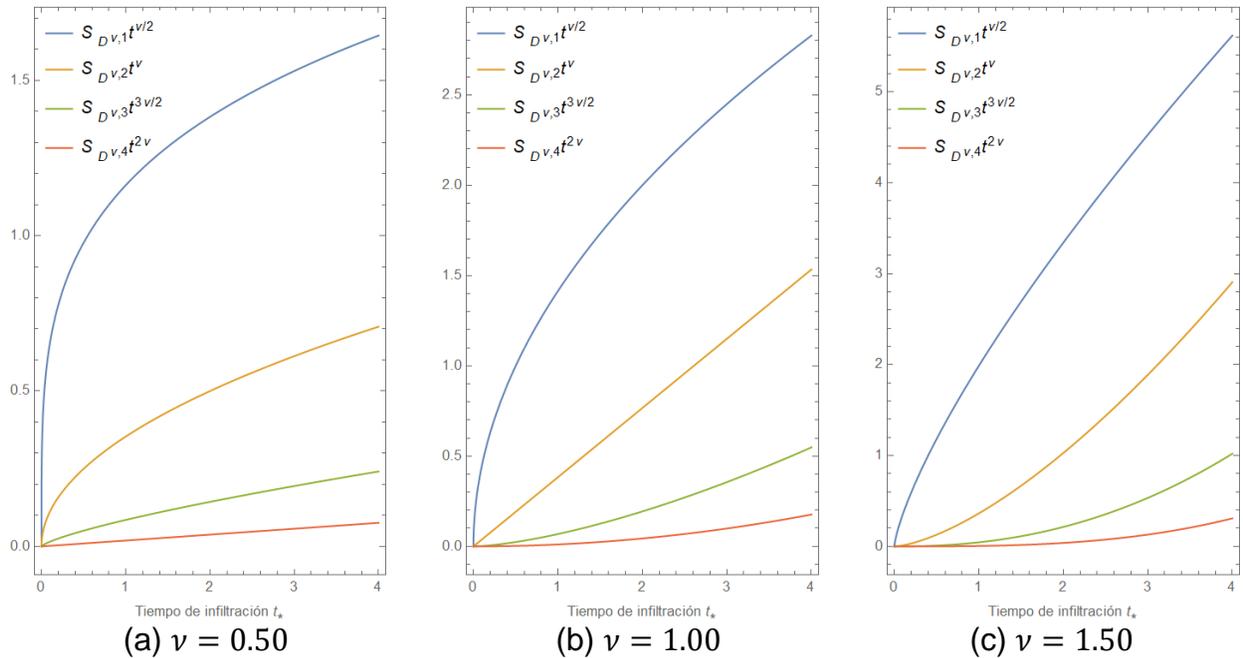


Figura 1. Primeros cuatro términos de la serie $I_*(t_*)$, $S_{\nu,n}^* t^{n\nu/2}$ para $n = 1, 2, 3, 4$ y diferentes valores del orden de la derivada fraccionaria ν y un tipo de suelo representado por $\beta = 0.85$ válido para arenas y arcillas y $\tau_c^* = 1$.

La Figura 2 muestra el comportamiento de la infiltración anómala para diferentes valores de ν , donde $\nu = 1$ es el caso clásico. Los fenómenos descritos por la infiltración anómala con $\nu < 1$ se conocen como fenómenos subdifusivos, los cuales indican que el flujo modifica los medios porosos de tal manera que se desplazan partículas bloqueando fracturas o canales, donde, para un valor menor de ν , hay mayor bloqueo al flujo, mostrando un valor menor a la infiltración fraccionada acumulada. Los fenómenos descritos con $\nu > 1$ se conocen como fenómenos superdifusivos, donde el flujo modifica los medios porosos de tal manera que las partículas crean nuevas fracturas o canales que permiten una mayor movilidad al fluido, donde, para un mayor valor de ν , hay un mayor flujo y por lo tanto una mayor infiltración acumulada fraccionada.

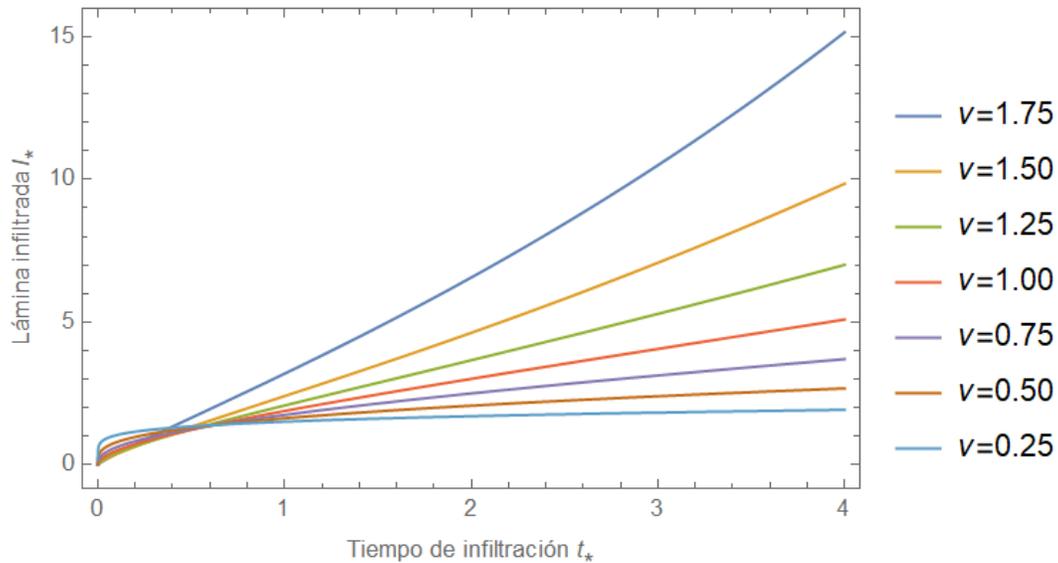


Figura 2 La infiltración fraccionaria: $\beta = 0.8, \tau_c^* = 1, \nu = 0.25, 0.50, 0.75, 1.00, 1.25, 1.50, 1.75$.

La Figura 3 muestra el efecto de β sobre la infiltración fraccionaria $I_*(t_*)$ para varios valores de ν . Como se describió anteriormente, β está asociado con las características hidrodinámicas del tipo de suelo, donde $\beta = 0$ corresponde a un tipo de suelo lineal resuelto por Green y Ampt para $\nu = 1$. $\beta = 1$ corresponde a la solución dada por Talsma y Parlange con $\nu = 1$. Además, la Figura 3 muestra cómo el efecto de ν es mayor que β para determinar el valor de la infiltración acumulada fraccional $I_*(t_*)$; es decir, el comportamiento anómalo del suelo tiene un mayor impacto en la infiltración acumulada en comparación con el tipo de suelo. Por otro lado, se puede observar que, para un valor fijo de ν , los valores extremos de β limitan el comportamiento de la infiltración.

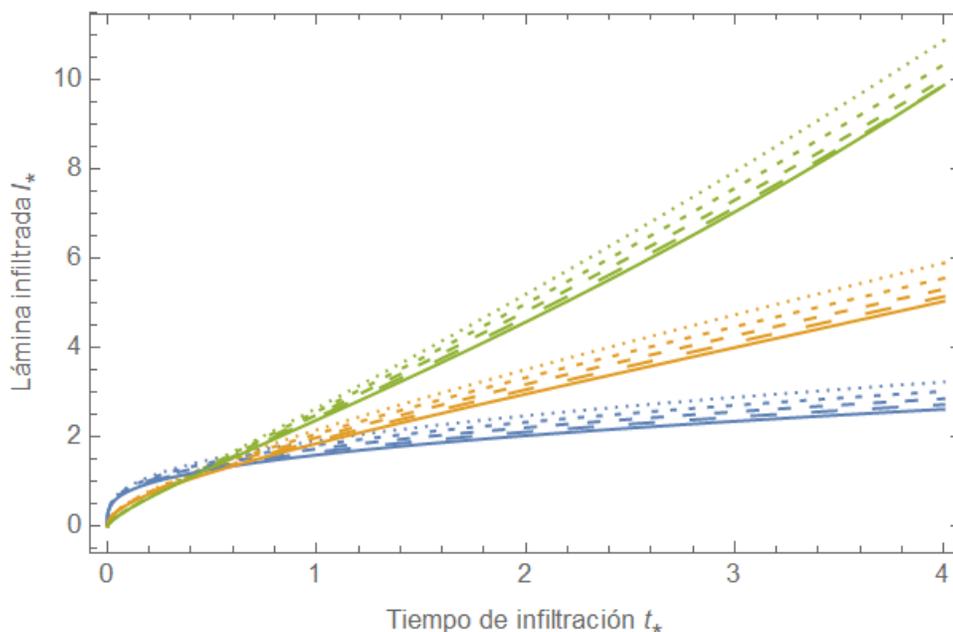


Figura 3. Aproximación en tiempos cortos para la infiltración fraccionaria considerando diferentes tipos de suelo representados por $\beta = 0.0, 0.25, 0.5, 0.75, 1.0$, con $\tau_c^* = 1$ y $\nu =$



0.5, 1.0, 1.5, respectivamente. Los resultados en verde corresponden a $\nu = 1.5$, los resultados en naranja a $\nu = 1.0$ y los resultados en azul a $\nu = 0.5$, donde una línea más discontinua indica un valor menor para β .

Conclusiones

Se han presentado las ecuaciones diferenciales, que resultan de los principios de conservación de la masa y de cantidad de movimiento a través de la ley de Darcy, para describir los procesos de transferencia de masa y energía en el suelo especialmente en el fenómeno de la infiltración. En particular se considera la ecuación diferencial en la cual el espacio es una función de la cantidad de agua y del tiempo, en lugar de que la cantidad de agua es función del espacio y del tiempo, tal y como fue considerado por Philip en los años cincuenta del siglo veinte para deducir la famosa solución en serie en la raíz cuadrada del tiempo y de radio de convergencia aún desconocido, válida para tiempos cortos. En la ecuación diferencial la derivada parcial entera del espacio con respecto al tiempo ha sido remplazada por una derivada de orden fraccionaria en el sentido de Caputo para tomar en cuenta los procesos de memoria que el suelo hereda al agua en su tránsito por el medio poroso. Con estas consideraciones se ha deducido una solución en serie del fenómeno de la infiltración, pero en función del tiempo elevado a la mitad del orden fraccionario de la derivada temporal; cuando este orden es la unidad se obtiene como caso particular la solución clásica de Philip. Para extender la ecuación diferencial fraccionaria temporal así deducida a todo tiempo del fenómeno de la infiltración, se han retomado y adaptados los conceptos de la teoría clásica de Parlange para deducir soluciones aproximadas, pero de alto grado de precisión de la ecuación de infiltración fraccionaria o anómala. La ecuación de la infiltración anómala aproximada resultante es resuelta en serie para los tiempos cortos, sin embargo, se requieren métodos numéricos para su solución en todo tiempo; cuestión que abre una línea de investigación. No obstante, se presenta una primera ilustración gráfica de la infiltración anómala cuando varía el orden de la derivada fraccionaria temporal.

Referencias Bibliográficas

- Darcy, H. 1856. Détermination des lois d'écoulement de l'eau à travers le sable. In Les Fontaines Publiques de la Ville de Dijon. Victor Dalmont, Paris. pp. 590-594.
- Fuentes, C. 1989. Teoría de la infiltración unidimensional: 2. La infiltración vertical. *Agrociencia*, 78: 119-153.
- Fuentes, C., R. Haverkamp, J.-Y. Parlange. 1992. Parameter constraints on closed-form soil-water relationships. *Journal of Hydrology*, 134: 117-142.
- Green, W.H., G.A. Ampt. 1911. Studies in soil physics, I: the flow of air and water through soils. *J. Agric. Sci.*, 4: 1-24.

Parlange, J.-Y. 1975. On solving the flow equation in unsaturated soils by optimization: Horizontal infiltration. *Soil Sci. Soc. Amer. Proc.*, 39: 415-418.

Parlange, J.-Y., R.D. Braddock, I. Lisle, R.E. Smith. 1982. Three parameter infiltration equation. *Soil Sci.*, 111: 170-174.

Philip, J. R., 1957. The theory of infiltration: 1. The infiltration equation and its solutions. *Soil Sci.* 83: 345-357.

Talsma, T., J.-Y. Parlange. 1972. One-dimensional vertical infiltration. *Aust. J. Soil. Res.*, 10: 143-150.

Anexo

En la ecuación (53) se utiliza el siguiente desarrollo en potencias:

$$\frac{\beta}{\exp[\beta \sum_{n=1}^{\infty} S_{v,n}^*] - 1} = \sum_{n=1}^{\infty} b_{v,n}^* t_*^{(n-2)v/2} \quad (60)$$

donde, para los primeros cuatro términos, se tiene

$$b_{v,1}^* = \frac{1}{S_{v,1}^*}, \quad b_{v,2}^* = -\left(\frac{\beta}{2} + \frac{S_{v,2}^*}{S_{v,1}^{*2}}\right) \quad (61)$$

$$b_{v,3}^* = \frac{\beta^2 S_{v,1}^*}{12} - \frac{S_{v,3}^*}{S_{v,1}^{*2}} + \frac{S_{v,2}^{*2}}{S_{v,1}^*}, \quad b_{v,4}^* = \frac{\beta^2 S_{v,2}^*}{12} + \frac{2S_{v,2}^* S_{v,3}^*}{S_{v,1}^{*2}} - \frac{S_{v,2}^{*3}}{S_{v,1}^{*4}} - \frac{S_{v,4}^*}{S_{v,1}^{*2}} \quad (62)$$

La introducción de la ecuación (60) en la ecuación (53) proporciona:

$$\beta \frac{\tau_{c^*}^{1-v}}{\Gamma(v)} \int_0^{t_*} \frac{(t_* - \tau_*)^{v-1}}{\exp[\beta I_*(\tau_*)] - 1} d\tau_* = \tau_{c^*}^{1-v} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\Gamma(1 + (\frac{n}{2}-1)v)}{\Gamma(1 + \frac{n}{2}v)} b_{v,n}^* t_*^{nv/2} \quad (63)$$

De la ecuación (53) se deduce la expresión

$$\sum_{n=1}^{\infty} S_{v,n} t_*^{\frac{vn}{2}} = \frac{\tau_{c^*}^{1-v}}{\Gamma(1+v)} + \tau_{c^*}^{1-v} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\Gamma(1 + (\frac{n}{2}-1)v)}{\Gamma(1 + \frac{n}{2}v)} b_{v,n}^* t_*^{nv/2} \quad (64)$$

la cual permite identificar los coeficientes

$$S_{v,n}^* = \tau_{c^*}^{1-v} \begin{cases} \frac{\Gamma(1 + (\frac{n}{2}-1)v)}{\Gamma(1 + \frac{n}{2}v)} b_{v,n}^* & ; n \neq 2 \\ \frac{(1+b_{v,2}^*)}{\Gamma(1+v)} & ; n = 2 \end{cases} \quad (65)$$

Los primeros cuatro términos de la serie de la infiltración se obtienen con la combinación de las ecuaciones (61), (62) y (65) y son reportados en las ecuaciones (54)--(57).