



## PARÁMETROS MULTIFRACTALES EN LA ECUACIÓN DE RICHARDS

Carlos Mota<sup>1\*</sup>; Carlos Chávez<sup>2</sup>; Carlos Fuentes<sup>3</sup>

<sup>1</sup>Facultad de Ingeniería. Universidad Autónoma de Querétaro. C.U. Cerro de las Campanas, C.P. 76010, Querétaro, México.

Juan.mota.0@gmail.com (\*Autor de correspondencia)

<sup>2</sup>Facultad de Ingeniería. Universidad Autónoma de Querétaro. C.U. Cerro de las Campanas, C.P. 76010, Querétaro, México.

<sup>3</sup>Coordinación de Riego y Drenaje. Instituto Mexicano de Tecnología del Agua. Paseo Cuauhnáhuac 8532, Progreso, Jiutepec, Morelos, C.P. 62550. México.

### Resumen

Generalmente, la modelación de la infiltración de agua en un suelo se hace con un conjunto de parámetros que no cambian en el espacio ni en el tiempo, por lo que los resultados son muy homogéneos. En este trabajo se presenta un análisis de la rugosidad del frente de humedecimiento en un experimento de infiltración 2D. Con base en resultados de experimentos computacionales, se propone mover aleatoriamente y a lo largo del espacio el parámetro  $K_s$  de la curva de conductividad hidráulica.

**Palabras claves:** Ecuación de Richards, Multifractal, Conductividad hidráulica



## Introducción

El modelo matemático que describe el movimiento del agua en un medio poroso es la ecuación de Richards, la cual en un sistema bidimensional tiene la siguiente forma:

$$C(\Psi) \frac{\partial \Psi}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left( K(\Psi) \frac{\partial \Psi}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( K(\Psi) \frac{\partial \Psi}{\partial z} \right) - \frac{\partial K(\Psi)}{\partial z} \quad (1)$$

donde  $\Psi(\theta)$  es la presión,  $\theta(\Psi)$  es la cantidad de agua,  $K(\Psi)$  es la conductividad hidráulica,  $C(\Psi)$  es la capacidad específica. La ecuación (1) es el resultado de dos procesos: sustituir el flujo de Darcy en la ecuación del principio de conservación de masa y definir:

$$C(\Psi) = \frac{\partial \theta}{\partial \Psi} \quad (2)$$

Existen varios modelos para las curvas de capacidad específica y de conductividad hidráulica: Brooks y Corey (1964), Van Genuchten (1980), Braddock et al. (2001) Burdine, 1953, Mualem, 1976, Fuentes et al. (2001, 2003).

El modelo de Van Genuchten (1980) para la capacidad específica tiene la siguiente expresión:

$$\theta(\Psi) = \theta_r + \frac{\theta_s - \theta_r}{\left( 1 + \left( \frac{\Psi}{\Psi_d} \right)^n \right)^m} \quad (3)$$

donde  $\theta_r$  es la cantidad residual de agua,  $\theta_s$  es la cantidad de agua a saturación,  $m$  y  $n$  son parámetros de forma y  $\Psi_d$  es un valor característico de la presión.

Fuentes et al. (2003) obtuvieron tres modelos para la conductividad hidráulica que se basan en conceptos de geometría fractal.

Poroso de la media geométrica:

$$K(\theta) = K_s \left[ 1 - \left( 1 - \theta^{1/m} \right)^{sm} \right] \quad (4)$$

Poroso neutral:

$$K(\theta) = K_s \theta^s \left[ 1 - \left( 1 - \theta^{1/m} \right)^{sm} \right] \quad (5)$$

Poroso grande:

$$K(\Theta) = K_s \left[ 1 - \left( 1 - \Theta^{1/m} \right)^{2sm} \right] \quad (6)$$

donde  $K_s$  es la conductividad hidráulica a saturación y es la solución de  $(1-\phi)^s + \phi^{2s} = 1$  con  $\phi = \theta_s$ .

## Materiales y Métodos

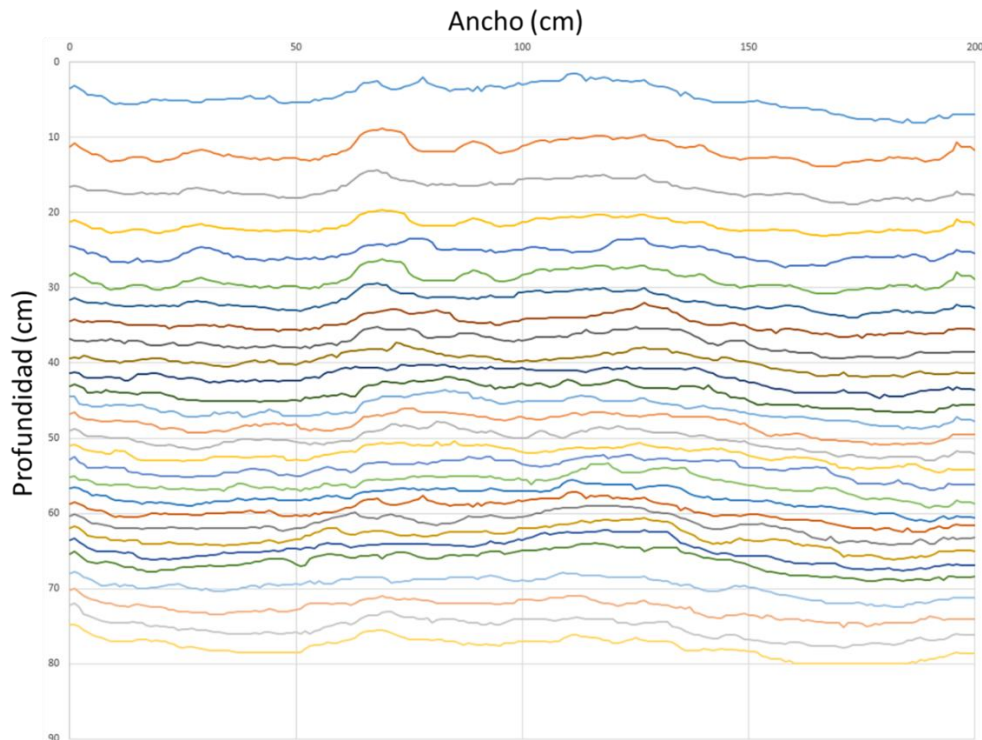
### Medidas multifractales en el experimento de infiltración (Real)

Chávez (2010) realizó un experimento de infiltración en el módulo de drenaje de 2m de ancho por 1.8m de altura, ver **Figura 1**. El suelo utilizado tiene los siguientes parámetros:  $\theta_s = 0.5695$ ,  $\theta_r = 0.0$ ,  $\theta_{inicial} = 0.1662$ ,  $m = 0.3410$ ,  $n = 1.8677$ ,  $s = 0.7083$ . Además, durante el experimento se mantuvo una presión constante de 10 cm en la superficie. Los parámetros  $K_s$  y  $\Psi_d$  se obtuvieron mediante la optimización de la ecuación (1) con los datos de la lámina infiltrada:  $K_s = 1.1498 \left( \frac{cm}{hr} \right)$ ,  $\Psi_d = -110.68$



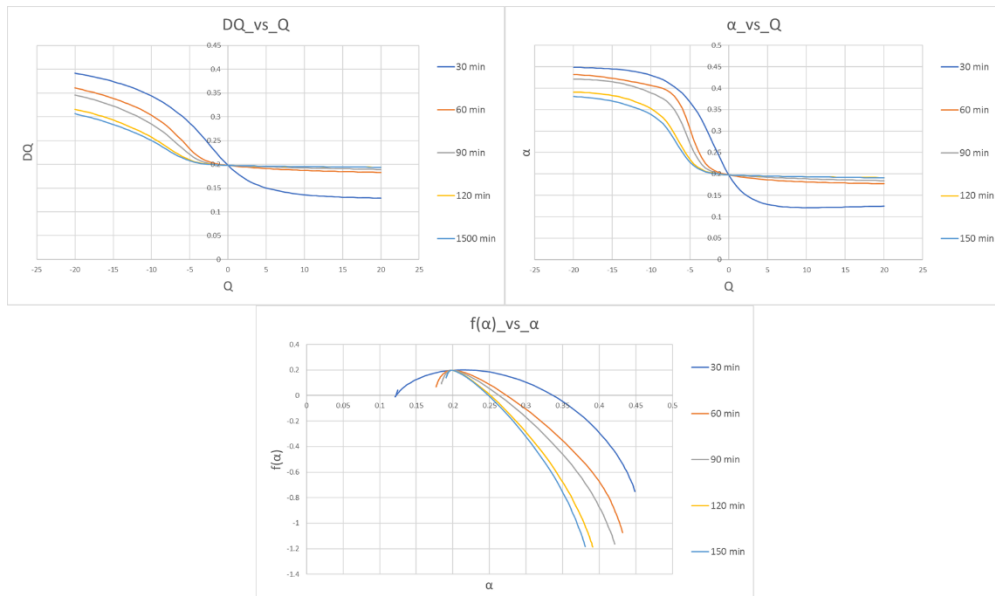
**Figura 1.** Foto tomada de la tesis de Chávez (2010). Módulo de drenaje utilizado para el experimento de infiltración.

Durante el experimento se extrajo la evolución del frente aparente de humedad, el cual es la interface visual entre la región seca y la región mojada ver **Figura 2**. El muestreo se realizó cada media hora y después de doce horas de iniciado el experimento, el muestreo se realizó cada hora.



**Figura 2.** Frente de humedecimiento cada 30 minutos, los últimos cuatro se obtuvieron cada hora.

En este trabajo se presentan los resultados relativos a los primeros cinco muestreos (30, 60, 90, 120 y 150 minutos). En la **Figura 3** se muestran tres de las medidas multifractales de Mandelbrot:  $DQ$  es la dimensión generalizada,  $\alpha$  es un conjunto de exponentes y  $f(\alpha)$  es el espectro de singularidad.



**Figura 3.** Medidas multifractales de los 5 primeros muestreos (150 minutos).



### Esquema numérico utilizado para resolver la ecuación de Richards

Debido a que el dominio de la solución es un rectángulo, se escoge una discretización en forma de cuadrícula de 200x200 cm. con  $\Delta x = 1\text{cm}$ ,  $\Delta z = 1\text{cm}$ ,  $\Delta t = .0001\text{min}$ .

Para la solución se utilizan diferencias finitas con el esquema explícito en la zona no saturada. En la zona saturada se optimiza la solución con el gradiente conjugado para problemas no lineales, Chávez et. al (2018).

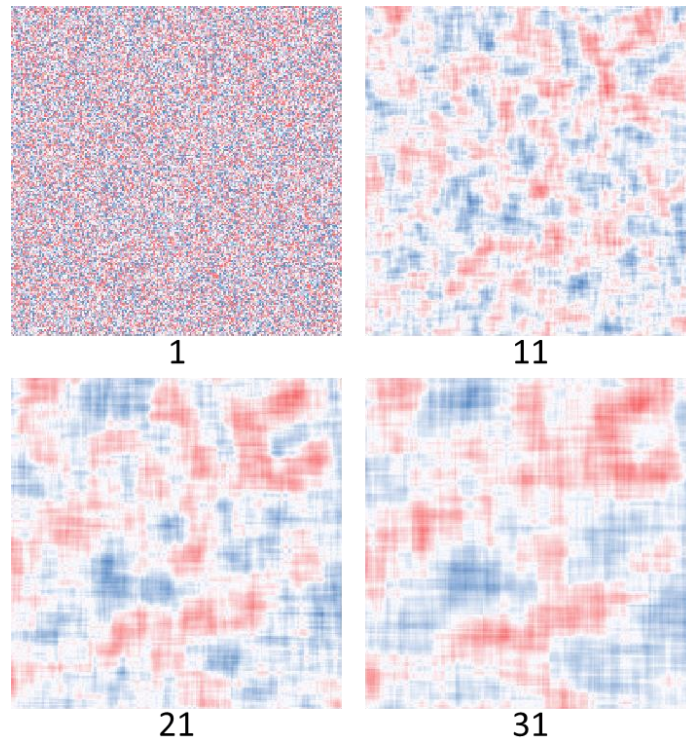
Los parámetros del suelo que se utilizan son los mencionados en la sección anterior. Se utiliza el modelo de Van Genuchten para la capacidad específica y la fórmula del poro de la media geométrica para la conductividad hidráulica.

### Medidas multifractales en experimentos computacionales utilizando la ecuación de Richards

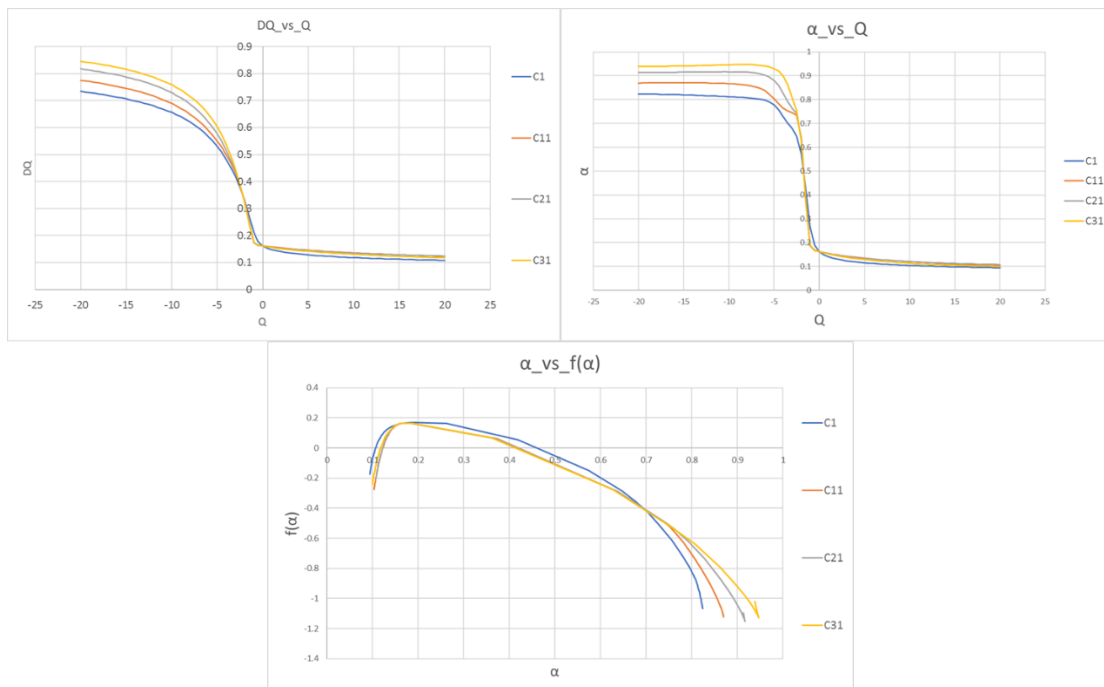
Si se aplican los parámetros uniformemente dentro de todo el dominio, se obtienen resultados homogéneos y de esta manera es imposible una comparación con los datos reales, **Figura 2**.

La conductividad hidráulica puede entenderse como la velocidad con la que el agua pasa por el medio poroso, por ello, aquí se propone modificar aleatoriamente el valor  $K_s$  en el dominio espacial. De esta manera cada punto en la discretización espacial tiene su propia conductividad.

El parámetro  $K_s$  se hizo variar de manera que quede dentro del intervalo  $[0.5498, 1.7498] \left(\frac{\text{cm}}{\text{hr}}\right)$ . Las matrices de la **Figura 4** muestran la distribución espacial del parámetro  $K_s$ , el color rojo es el máximo y el azul es el mínimo. En la **Figura 5** se muestran las medidas multifractales de las matrices en la **Figura 4**.



**Figura 4.** Matrices de varianza para el parámetro  $K_s$ . Las cuatro matrices se generan partiendo de una matriz más grande de valores aleatorios. El Número inferior a cada matriz es el tamaño de ventana de suavizado.



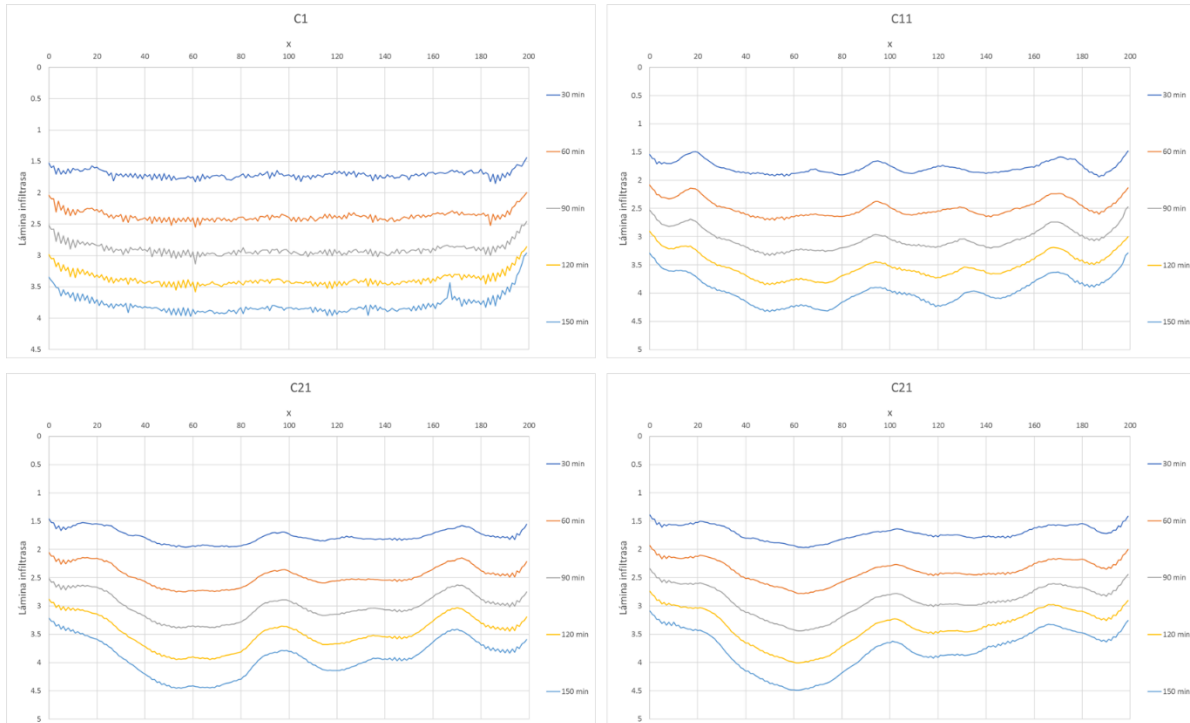
**Figura 5.** Medidas multifractales de las matrices de la **Figura 4.**



## Resultados y Discusión

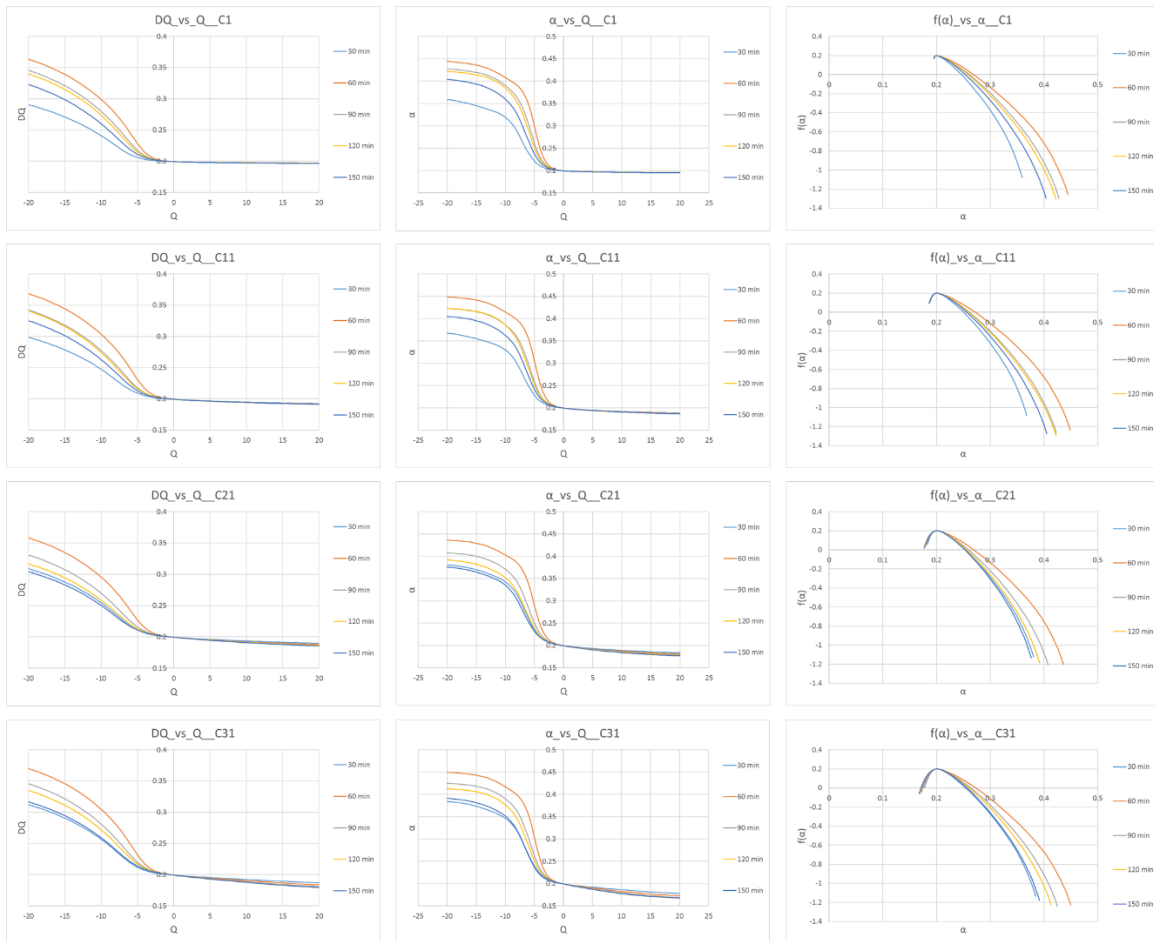
### Lámina infiltrada en los experimentos computacionales

El frente aparente de humedad es una visualización del flujo de agua dentro del módulo de riego, no hay medida de cantidad de agua para esta interface. Para comparar este fenómeno se va a utilizar la lámina infiltrada en cada centímetro a lo ancho del dominio ver **Figura 6**.



**Figura 6.** Lámina infiltrada por centímetro.

La **Figura 7** muestra las medidas multifractales de la lámina infiltrada de la **Figura 6**. Salvo los datos correspondientes a los 30 minutos, todas las demás medidas siguen una secuencia ordenada y tienen los mismos rangos que los resultados de los datos del frente de humedecimiento observado. Sin embargo, las medidas de los datos reales, correspondientes al minuto 30 también son muy diferentes de las otras (60, 90, 120, 150 min), ver **Figura 3**.



**Figura 7.** Medidas multifractales para las curvas de la **Figura 6**.

Para este caso, el espectro de singularidad que más se acerca al de los datos reales es el que corresponde a la matriz C21.

## Conclusiones

Al usar parámetros uniformes en todo el dominio se obtienen resultados homogéneos. Las medidas multifractales nos permiten medir la rugosidad de los datos observados. Al crear parámetros con rugosidad en el espacio, se tienen resultados tan rugosos como los datos observados.





## Referencias Bibliográficas

- Burdine, N. 1953. Relative permeability calculations from pore size distribution data. *Journal of Petroleum Technology*, 5(03), 71-78.
- Chávez, C., Mota, C., Quevedo, A., & Fuentes, C. (2018). Modelación bidimensional de la infiltración del agua en surcos aplicando el gradiente conjugado. *Tecnología y Ciencias del Agua*, 9(1), 89-100.
- Perrier, E., Tarquis, A. M., & Dathe, A. (2006). A program for fractal and multifractal analysis of two-dimensional binary images: Computer algorithms versus mathematical theory. *Geoderma*, 134(3-4), 284-294.
- Fuentes C., Brambila F., Vauclin M., Parlange J.-Y. y Haverkamp R. (2001). Modelación fractal de la conductividad hidráulica de los suelos no saturados. *Ing. Hidráulica en Méx.* 16(2), 119-137.
- Posadas, A. N. D.; Giménez, D.; Bittelli, M.; Vaz, C. M. P.; Flury, M. (2001). "Multifractal Characterization of Soil Particle-Size Distributions". *Soil Science Society of America Journal*. 65 (5): 1361
- Richards, L. A. 1931. Capillary conduction of liquids through porous mediums. *Journal of Applied Physics*, 1(5), 318-333.
- Van Genuchten, M. T. 1980. A closed-form equation for predicting the hydraulic conductivity of unsaturated soils. *Soil science society of America journal*, 44(5), 892-898.