



Artículo: COMEII-17043

## III CONGRESO NACIONAL DE RIEGO Y DRENAJE COMEII 2017

Puebla, Pue., del 28 al 30 de noviembre de 2017

### ESTIMACIÓN DE LA CURVA DE RETENCIÓN DE AGUA EN EL SUELO A PARTIR DE SU CURVA DE GRANULOMETRIA

Felipe Zataráin\*; Carlos Fuentes

Instituto Mexicano de Tecnología del Agua. Paseo Cuauhnáhuac 8532, Progreso, Jiutepec,  
Morelos, C.P. 62550. México.

[zatarainf@gmail.com](mailto:zatarainf@gmail.com) (\*Autor de correspondencia)

#### Resumen

La obtención de la curva de retención a partir de datos con facilidad de adquisición, como la distribución del tamaño de partículas, es un problema abierto debido a la compleja geometría de los suelos. En el presente trabajo se muestra una metodología para pasar de la curva de granulometría a la curva de retención en la que la relación no lineal entre las escalas de Laplace y Stokes, es decir, entre los diámetros de poro y partícula, es establecida con base en elementos de geometría fractal. Tanto la curva granulométrica como la curva de retención son descritas con ecuaciones de la forma de van Genuchten (1980) sujeta a la restricción entre parámetros del modelo de conductividad hidráulica del poro grande de Fuentes *et al.* (2003). La verificación de las relaciones propuestas se realiza con 660 suelos de la base de datos GRIZZLY, cuya distribución de acuerdo con las clases texturales cubre la mayoría del triángulo de texturas.

**Palabras clave adicionales:** Geometría Fractal, Propiedades Hidrodinámicas, Ingeniería de Riego



## Introducción

Las propiedades hidrodinámicas del suelo, es decir, la relación entre el contenido volumétrico de agua con la presión y con la conductividad hidráulica, son de fundamental importancia en la hidrología de los suelos ya que ellas son requeridas en la ecuación de transferencia del agua en suelos parcialmente saturados que a su vez puede utilizarse en el diseño de riego y drenaje, la hidráulica de canales y en estudios de hidrología y contaminación, entre otras aplicaciones.

La caracterización de las propiedades hidrodinámicas de los suelos y la solución analítica o numérica de las ecuaciones de flujo se facilitan si las propiedades hidrodinámicas se expresan a través de funciones analíticas continuas. En la literatura especializada se han reportado diferentes formas funcionales, basadas en la combinación de las variables dependientes y en un cierto número de parámetros de ajuste. Independientemente del significado correcto de los parámetros de ajuste, sus valores están sujetos a restricciones impuestas por el uso de las ecuaciones de transferencia.

En la caracterización de las propiedades hidrodinámicas las medidas directas en campo o en laboratorio tienen un alto costo, requieren de mucho tiempo para su implementación y su aplicación en las grandes escalas tiene muchas restricciones. En laboratorio, los métodos más comunes son el de la olla y membrana de presión. En este método se obtienen puntos sucesivos de la curva de retención mediante la aplicación de presión a las muestras de suelo hasta alcanzar el equilibrio. Este método requiere de varias semanas para su aplicación y los datos que se obtienen tienen poca relación con las condiciones de campo debido a que se utilizan pequeñas muestras de suelo alterado.

Estas consideraciones han motivado el desarrollo de métodos basados en información más fácil de obtener, es decir, a partir de otras propiedades del suelo más accesibles como la textura, la densidad aparente, la materia orgánica y la mineralogía de arcillas.

El primer intento para pasar directamente de la distribución del tamaño de partículas a la curva de retención fue realizado por Arya & Paris (1981). El modelo empírico presentado por estos autores quizás sea el que mayor información proporciona sobre las escalas que determinan la presión del agua en el suelo. La principal hipótesis de este modelo es la similaridad de forma entre las curvas de granulometría y de retención. Haverkamp & Parlange (1986) presentan posteriormente un modelo similar que evalúan en suelos arenosos.

En el presente trabajo la relación no lineal entre las escalas de Laplace y Stokes, es decir, entre los diámetros de poro y partícula, es establecida con base en elementos de geometría fractal de acuerdo con Fuentes (1992). La conveniencia de la metodología es analizada a través de su aplicación a 660 suelos de la literatura.



## Materiales y métodos

El contenido de humedad en el suelo está íntimamente ligado a la curva porosimétrica,  $S(R)$ , que representa el volumen de poros relativo al volumen poroso total cuyos tamaños son menores o iguales a un tamaño  $R$ , llamada también frecuencia acumulada del tamaño de los poros con base en volumen.

Los métodos directos para la determinación de la curva porosimétrica son de aplicación restringida, situación que ha motivado el desarrollo de métodos para la obtención de ésta a partir de la curva granulométrica,  $F(D)$ , que representa la masa de las partículas por unidad de masa de suelo cuyos tamaños son menores o iguales a un tamaño  $D$ , llamada también frecuencia acumulada del tamaño de partículas con base en la masa. Es de señalarse que la curva granulométrica es la propia masa acumulada de las partículas en un suelo de masa unitaria ( $M_{st} = 1$ ).

La definición de los tamaños o escalas  $R$  y  $D$  es extremadamente difícil debido a la estructura geométrica irregular de los suelos. La definición se realiza de manera indirecta o equivalente. Para la primera se utiliza la ley de Laplace que establece la relación entre el potencial de presión ( $\psi$ ), expresado como una altura equivalente de agua, y el radio de poro ( $R$ ). Para la segunda escala se utiliza la ley de Stokes que describe la velocidad ( $v_s$ ) en régimen laminar de una partícula de diámetro  $D$  que cae dentro de un fluido infinito. Estas leyes se escriben respectivamente de la manera siguiente:

$$\psi = -\frac{2\sigma \cos \alpha_c}{\rho_w g R} \quad (1)$$

$$v_s = \frac{g \rho_o}{18 \mu_c} \left( 1 - \frac{\rho_w}{\rho_o} \right) D^2 \quad (2)$$

Donde  $\sigma$  es la tensión en la interfaz agua-aire [ $MT^{-2}$ ];  $\mu_c$  es el coeficiente de viscosidad dinámica [ $ML^{-1}T^{-1}$ ];  $\rho_w$  es la densidad del agua [ $ML^{-3}$ ];  $\rho_o$  es la densidad de partículas [ $ML^{-3}$ ];  $g$  es la aceleración gravitacional [ $LT^{-2}$ ]; y  $\alpha_c$  es el ángulo de contacto que forma la interfaz agua-aire con las partículas sólidas.

Para establecer una relación entre  $S(R)$  y  $F(D)$  se ha aceptado que existe una correspondencia biunívoca entre  $R$  y  $D$ , de modo que en un paquete caracterizado por  $R$  y  $D$  la relación de vacíos ( $e$ ) es una constante. Arya & Paris (1981) discretizan la curva granulométrica en  $N_c$  clases, cada clase caracterizada por  $R_i$  y  $D_i$ , de modo que el volumen de los vacíos ( $V_{vi}$ ) relativo al volumen de los sólidos ( $\Delta V_{si}$ ) en la clase  $i$ -ésima es igual al volumen total de los vacíos ( $V_{vt}$ )



relativo al volumen total de los sólidos ( $V_{st}$ ), es decir  $\Delta V_{vi}/\Delta V_{si} = V_{vt}/V_{st} = e$ . Aceptando que la densidad de las partículas es la misma en cada clase  $\Delta M_{si}/\Delta V_{si} = M_{st}/V_{st} = \rho_o$ , se obtiene  $\Delta V_{vi}/V_{vt} = \Delta M_{si}/M_{st}$ ; la masa total es tomada unitaria,  $M_{st} = 1$ . La acumulación de las fracciones relativas de volumen y de masa conduce a la igualdad siguiente:

$$S(R) = F(D) \quad (3)$$

Se acepta que para un contenido volumétrico de agua dado ( $\theta$ ), el agua se encuentra contenida en los poros con radios menores o iguales a  $R$ . En tal situación la curva porosimétrica se vuelve igual al grado de saturación  $\theta/\phi$ , donde  $\phi$  es la porosidad total del suelo, es decir  $\theta(R) = \phi S(R) = \phi F(D)$ . Con la última relación se puede estimar la característica de humedad  $\theta(\psi)$  a partir de la curva granulométrica utilizando la relación de Laplace, ecuación (1), si se cuenta con una relación entre  $R$  y  $D$ .

En cada paquete formado por la clase  $i$ -ésima de partículas y poros, puede obtenerse una relación entre  $R$  y  $D$  siguiendo el razonamiento de Arya & Paris (1981). En cada paquete el volumen de los sólidos es proporcionado por  $\Delta V_{si} = \frac{\pi}{6} \Delta N_i D_i^3$  donde  $\Delta N_i$  es el número de partículas de diámetro  $D_i$ . El espacio de los vacíos es asimilado a un tubo cilíndrico de área  $\pi R_i^2$  y longitud  $\Delta N_i D_i$ ; considerando sin embargo que las partículas son irregulares la longitud del tubo deberá ser mayor, para ello se introduce un exponente  $\alpha \geq 1$  de modo que la longitud quede definida por  $(\Delta N_i)^\alpha D_i$  y el volumen de los vacíos por  $\Delta V_{vi} = \pi R_i^2 (\Delta N_i)^\alpha D_i$ . Puesto que la relación de vacíos es constante se obtiene lo siguiente:

$$R_i = D_i \sqrt{\frac{e}{6(\Delta N_i)^{\alpha-1}}} \quad (4)$$

El número de partículas en el paquete se calcula con  $\Delta N_i = 6V_{si}/\pi D_i^3 = 6\Delta F_i/\pi \rho_o D_i^3$ , donde  $\Delta F_i$  es la masa de las partículas en la clase  $i$ -ésima. La relación de vacíos se calcula con  $e = \phi/(1-\phi)$ . Mediante la reproducción, en algunos suelos, de la característica de humedad a partir de la curva granulométrica con las ecuaciones (3) y (4), asumiendo un ángulo de contacto nulo y una temperatura de 20°C, es decir  $\psi = -0.149/R$  si  $R$  y  $\psi$  están en centímetros, los autores obtienen un valor medio de  $\alpha \cong 1.38$ .

La sustitución de la expresión de  $\Delta N_i$  en la ecuación (4) conduce a la siguiente relación entre  $R$  y  $D$ :



$$R_i = D_i^{1+3(\alpha-1)/2} \sqrt{\frac{e}{6} \left( \frac{\pi \rho_o}{6 \Delta F_i} \right)^{\alpha-1}} \quad (5)$$

La estimación de la presión del agua con la ley de Laplace utilizando la ecuación (4) puede depender del tamaño de la clase. En efecto, si la definición de las clases es tal que contengan la misma masa  $\Delta F_i = 1/N_c$  y tomando  $D_i = \frac{1}{2} [D(F_{i-1/2}) + D(F_{i+1/2})]$ , el valor de  $R_i$  y en consecuencia la presión asociada pueden depender de  $N_c$ . Cuando la partición es realizada en el dominio de manera constante  $\Delta D_i = (D_{\text{máx}} - D_{\text{mín}})/N_c$ , con  $D_i = \frac{1}{2} (D_{i-1/2} + D_{i+1/2})$ , se obtendrán  $\Delta F_i$  variables definidas por  $\Delta F_i = F(D_{i+1/2}) - F(D_{i-1/2})$ , pudiendo ocurrir que la variación de  $D_i$  en relación con el número de clases sea menos fuerte que la variación correspondiente en  $\Delta F_i$ , y en consecuencia  $R_i$  pueda depender de  $N_c$ .

Si, de acuerdo con Fuentes (1992), se acepta que la distribución de la masa en las clases sigue un patrón fractal, es decir  $\Delta F_i = \Delta F_d (D_i/D_d)^{3-D_f}$ , donde  $D_f$  es la dimensión fractal y  $\Delta F_d$  es la masa asociada a una clase característica representada por  $D_d$ , de la ecuación (5) se obtiene, con  $s = D_f/3$ , lo siguiente:

$$R_i = D_i^{1+3s(\alpha-1)/2} \sqrt{\frac{e}{6} \left( \frac{\pi \rho_o D_d^{3(1-s)}}{6 \Delta F_d} \right)^{\alpha-1}} \quad (6)$$

En la cual el radio puede depender de la cantidad de masa ( $\Delta F_d$ ) correspondiente a la escala característica de las clases de partículas ( $D_d$ ), como ha sido señalado por Fuentes (1985), quien introduce distribuciones continuas para este modelo. En Fuentes (1992) se intenta salvar este problema al extraer la relación no lineal entre  $R$  y  $D$ . La misma estructura de la ecuación (6) sugiere una relación en potencia que contiene como caso particular la relación lineal utilizada por Haverkamp & Parlange (1985) en suelos arenosos.

La relación de empaquetamiento sugerida por Fuentes (1992) es la siguiente:

$$\frac{R}{R_d} = \left( \frac{D}{D_d} \right)^{1+\kappa} \quad (7)$$

En donde la relación entre las escalas de referencia ( $R_d$  y  $D_d$ ) quedan sujetas a una determinación a partir de los fenómenos dinámicos (como la infiltración y el drenaje de los suelos) con la teoría de los fenómenos inversos. Este autor propone



dos relaciones entre  $\kappa$  y  $s$ . En las pequeñas escalas, donde las arcillas predominan, la relación:

$$\kappa = \frac{2s-1}{2(1-s)} \quad (8)$$

Mientras que en las grandes escalas, donde las arenas predominan, la relación siguiente

$$\kappa = \frac{2s-1}{2s(1-s)} \quad (9)$$

El parámetro  $s$  está definido como  $s = D_f/E$ , donde  $D_f$  es la dimensión fractal del suelo y  $E = 3$  la dimensión de Euclides en donde el suelo se encuentra embebido, y su dependencia con respecto a la porosidad total del suelo ( $\phi$ ) se encuentra definida de manera implícita en la ecuación siguiente (Fuentes *et al.*, 2001):

$$(1-\phi)^s + \phi^{2s} = 1 \quad (10)$$

Dado que la clase característica en esta aproximación no puede argumentarse sin ambigüedad, en el contexto de la modelación de Arya & Paris (1981) y Fuentes (1985, 1992), el último autor sugiere concentrar los esfuerzos en estimar los parámetros de “forma” de las distribuciones utilizadas para describir la curva granulométrica.

Si la curva porosimétrica es representada por un función  $S(R; R_d, \xi)$  en donde  $R_d$  representa la escala característica de los tamaños de los poros y por tanto de la presión del agua (o “escala” de los poros o de la presión) y  $\xi$  es el vector de los parámetros de forma (que intervienen directamente en la densidad de esta función), es claro que la curva granulométrica de acuerdo con las ecuaciones (3) y (7) adquiere la forma  $F(D) = S(D^{1+\kappa}; R_d, \xi)$ . La descripción de la primera curva se volverá más difícil si cada uno de los parámetros deberá guardar una relación estrecha con los de la segunda. Por tal razón, la “forma” de las curvas será caracterizada con el parámetro que resulta del trabajo de Bloemen (1980) sobre la curva granulométrica para caracterizar su forma en “S”; este parámetro fue propuesto partiendo de una forma discreta de la curva y escrita en lenguaje continuo por Fuentes (1985). El parámetro de forma es definido por la pendiente media:

$$\xi_F = \int_0^1 \frac{d \log(F)}{d \log(D)} dF \quad (11)$$

La cual puede extenderse para caracterizar la forma también en “S” de la curva porosimétrica:



$$\xi_S = \int_0^1 \frac{d \log(S)}{d \log(R)} dS \quad (12)$$

Considerando las ecuaciones (3) y (5) en las ecuaciones (11) y (12) se encuentra la relación siguiente entre las pendientes medias:

$$1 + \kappa = \frac{\xi_F}{\xi_S} \quad (13)$$

Para ilustrar la aplicación de las relaciones expuestas anteriormente, la curva de retención se describe con la ecuación de van Genuchten (1980).

Si el contenido volumétrico de agua se obtiene mediante la acumulación del volumen de vacíos desde los poros más pequeños hasta los poros más grandes, es decir, el llenado de los poros se realiza en forma sucesiva, con la relación de Laplace y la ecuación (12), la curva porosimétrica puede expresarse de la manera siguiente:

$$S(R) = S_r + (1 - S_r) \left[ 1 + \left( \frac{R_d}{R} \right)^n \right]^{-m} \quad (14)$$

Donde  $S_r = \theta_r / \theta_s$

Con la ayuda de las ecuaciones (4) y (5), la curva granulométrica puede describirse con la función:

$$F(D) = F_r + (1 - F_r) \left[ 1 + \left( \frac{D_d}{D} \right)^N \right]^{-M} \quad (15)$$

Donde  $F_r = S_r$ ; con los parámetros de forma de ambas curvas relacionados con las expresiones siguientes:

$$M = m \quad \text{y} \quad N = (1 + \kappa)n \quad (16)$$

Por otra parte, con las ecuaciones (8) y (12) aplicadas a la ecuación de van Genuchten y la ecuación (14), respectivamente, se obtiene:

$$\xi_S = \frac{mn}{1+m} \quad \text{y} \quad \xi_F = \frac{MN}{1+M} \quad (17)$$

Las relaciones mostradas consideran a los parámetros  $m$  y  $n$  de forma independiente. Sin embargo, es conveniente utilizar alguna de las relaciones entre estos parámetros establecidas con el objeto de obtener formas cerradas de la función de conductividad hidráulica. Para ilustración, en este trabajo se utiliza la





relación obtenida por Fuentes *et al.* (2003) para el modelo de conductividad hidráulica (K) del “poro grande”:

$$K = K_s \left[ 1 - \left( 1 - S_e^{1/m} \right)^{2sm} \right] \text{ con } 0 < 2sm = 1 - 4s/n < 1 \quad (18)$$

Donde  $K_s$  es la conductividad hidráulica a saturación.

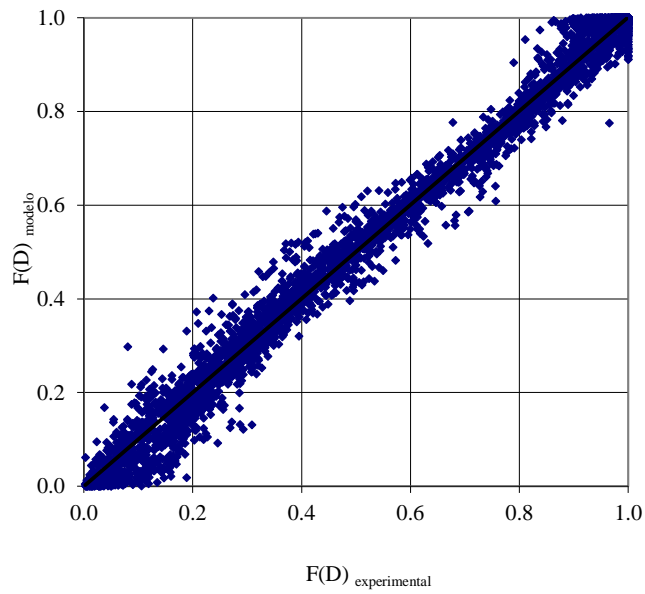
### **Análisis y discusión de resultados**

Para la aplicación de las relaciones descritas se utiliza la base de datos GRIZZLY (Haverkamp *et al.*, 1998) que compila datos de 660 suelos de la literatura. Prácticamente la totalidad de los datos provienen de experimentos de campo, excepto los datos correspondientes a 20 suelos que fueron caracterizados en experimentos de laboratorio. En la mayoría de los suelos se dispone de: i) la densidad aparente,  $\rho_d$  [g/cm<sup>3</sup>]; ii) densidad real,  $\rho_s$  [g/cm<sup>3</sup>], la cual se considera igual a 2.65 g/cm<sup>3</sup> para los casos en los que no se reporta el valor particular en la fuente; iii) el tamaño de partículas  $D$  [ $\mu$ m] como una función de la frecuencia acumulada; iv) porcentaje de materia orgánica; v) datos de la curva de retención  $\theta(\psi)$ ; y vi) datos de conductividad hidráulica  $K(\theta)$ . Para la determinación de la distribución del tamaño de partículas se utilizaron una gran variedad de métodos de medida (e.g. métodos de tamizado y sedimentación), al igual que para las características hidrodinámicas (e.g., tensiómetros, membranas de presión, sonda de neutrones, y métodos de drenaje interno). En los casos en que se reportan las curvas de humedecimiento y secado, solo la curva de secado se conservó para la base datos.

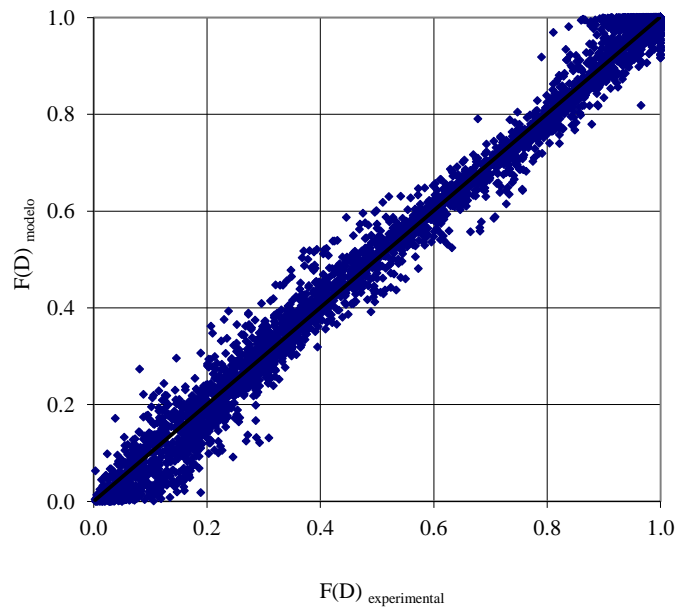
La distribución de los 660 suelos de acuerdo con las clases texturales del USDA (7<sup>a</sup> Sistema de Clasificación Americana de suelos del USDA, 1960) cubre la mayoría del triángulo de texturas. En la base datos están representadas 10 clases texturales: arena (85), arena franca (60), franco arenoso (143), franco (72), franco limoso (83), franco arcillo arenoso (2), franco arcilloso (31), franco arcillo limoso (61), arcillo limoso (54), y arcilla (69).

El parámetro  $s$  es calculado en función de la porosidad con la ecuación (10), el valor de  $\kappa$  se calcula con las expresiones (8) y (9) y los valores de  $D_d$  y  $m$  se obtienen mediante la minimización de la suma de los cuadrados de los errores entre la frecuencia acumulada experimental y la estimada con la ecuación (15), considerando la relación (17). Para la optimización se utiliza el algoritmo de Marquardt (1963). En la Figura 1 se muestra una comparación entre la frecuencia acumulada del tamaño de partículas experimental y la ajustada. En la figura se puede apreciar que no existe diferencia significativa entre los dos valores de  $\kappa$ .





$$(a) \kappa = \frac{2s-1}{2(1-s)}$$

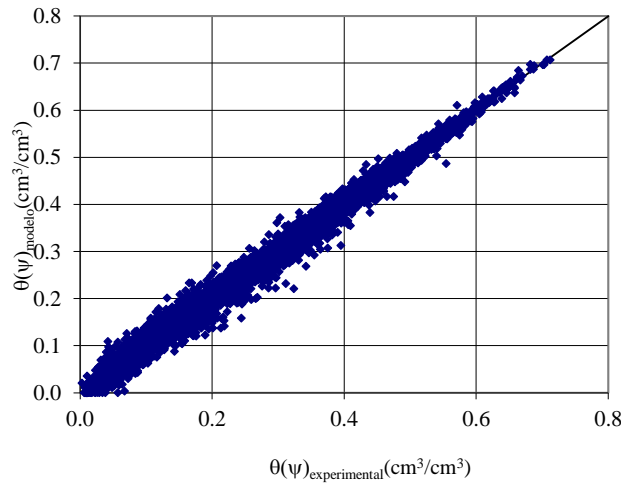


$$(b) \kappa = \frac{2s-1}{2s(1-s)}$$

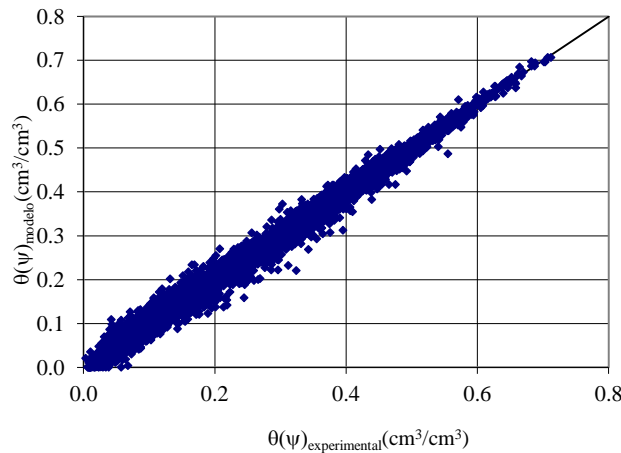
**Figura 1.** Ajuste de la curva granulométrica en los 660 suelos de la base de datos GRIZZLY, con parámetros de forma relacionados de acuerdo con el modelo de poro grande.

Los parámetros de forma de la curva de retención se obtienen con las relaciones (16).

Para verificar la bondad de la predicción, el valor "real" de  $m$  se estima a través del ajuste de la ecuación de van Genuchten a los datos experimentales considerando la relación entre parámetros del poro grande. Los valores de los parámetros  $\theta_r$  y  $\theta_s$  son tomados como se reportan en el catálogo ( $\theta_r = 0$ ); los valores de  $\psi_d$  y  $m$  son obtenidos mediante la minimización de la suma de los cuadrados de los errores entre el contenido volumétrico de humedad experimental y el estimado con la ecuación de van Genuchten. En la Figura 2 se muestra una comparación de los datos experimentales y los ajustados con el modelo.



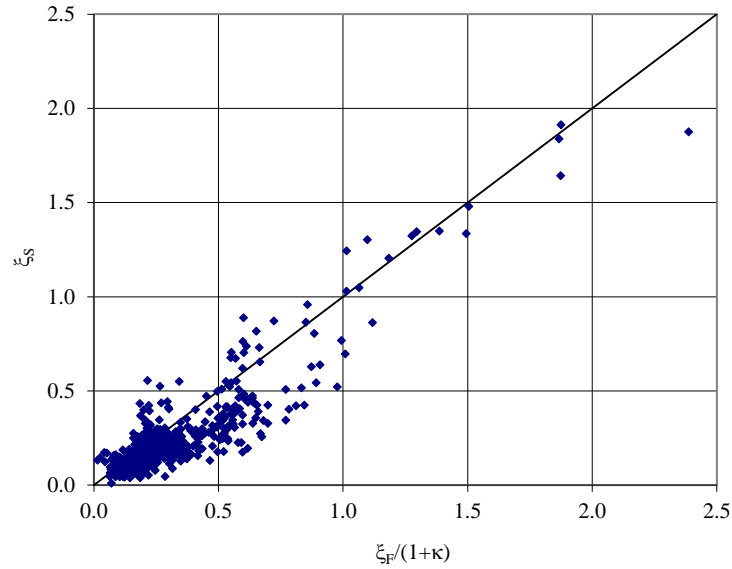
$$(a) \kappa = \frac{2s - 1}{2(1 - s)}$$



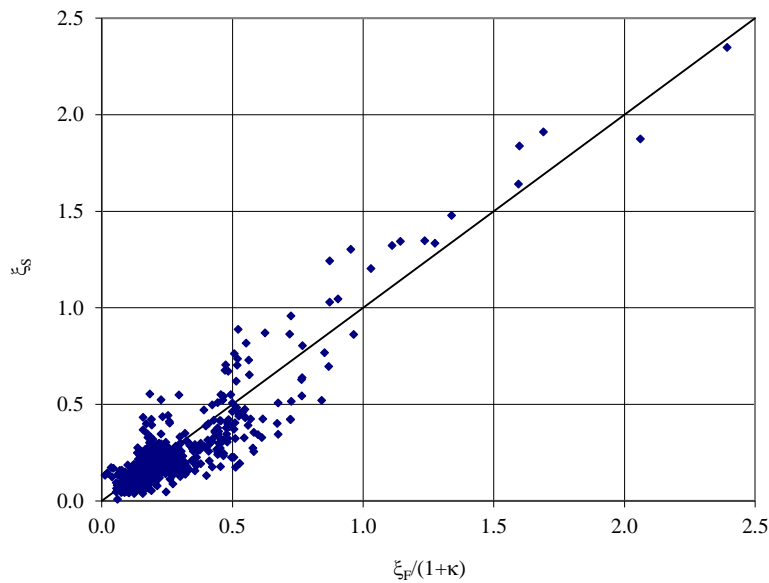
$$(b) \kappa = \frac{2s - 1}{2s(1 - s)}$$

**Figura 2.** Ajuste de la curva de retención en los 660 suelos de la base de datos GRIZZLY, con parámetros de forma relacionados de acuerdo con el modelo de poro grande.

En la Figura 3 se muestra la comparación entre las pendientes medias considerando la relación (17). Aunque la predicción es similar con ambas expresiones de  $\kappa$ , se puede apreciar una ligera mejoría con la ecuación (9), que corresponde a las grandes escalas.



$$(a) \kappa = \frac{2s-1}{2(1-s)}$$



$$(b) \kappa = \frac{2s-1}{2s(1-s)}$$

**Figura 3.** Predicción de la curva de retención a partir de la curva granulométrica en 660 suelos de la base de datos GRIZZLY.



## Conclusiones

Se realiza la estimación de los parámetros de forma de la característica de humedad a partir de la curva granulométrica del suelo aplicando las relaciones desarrolladas en el marco de la geometría fractal en la conceptualización de las escalas de Laplace y Stokes de Fuentes (1992).

La verificación de las relaciones propuestas se realiza a través de la comparación de las pendientes medias de las curvas granulométrica y de retención en 660 suelos de la base de datos GRIZZLY utilizando la ecuación de van Genuchten (1980).

Los resultados indican que la metodología propuesta puede ser utilizada con fines de predicción de los parámetros de forma. Los parámetros de estructura de la curva de retención deben ser obtenidos a partir de otras consideraciones, como pruebas de infiltración, pruebas de riego y de drenaje y de evaporación.

## Referencias Bibliográficas

- Arya, L.M., & J.F. Paris, 1981. A physicoempirical model to predict the soil moisture characteristic from particle-size distribution and bulk density data. *Soil Sci. Soc. Am. J.*, vol. 45, pp. 1023-1030.
- Bloemen, G. W., 1980. Calculation of hydraulic conductivities of soils from texture and organic matter content. *Z. Pflanzenernährung und Bodenkunde*. 143(5):581-612.
- Fuentes C., 1992. *Approche fractale des transferts hydriques dans les sols non-saturés*. Tesis de doctorado, Universidad Joseph Fourier de Grenoble, Francia, 267 pp.
- Fuentes, C., F. Brambila, M. Vauclin, J.-Y. Parlange, y R. Haverkamp. 2001. Modelación fractal de la conductividad hidráulica de los suelos no saturados. *Ingeniería Hidráulica en México*, vol. 16 núm. 2, pp. 119-137.
- Fuentes, C., A.C.D Antonino, J. Sepúlveda, F. Zataráin, B. de León, 2003. Predicción de la conductividad hidráulica relativa de los suelos con modelos fractales. *Ingeniería Hidráulica en México*, vol. 18 núm. 4 pp.31-40.
- Haverkamp, R., & Y.-Y. Parlange, 1986. Predicting the water-retention curve from particle-size distribution: I.Sandy soils without organic matter. *Soil Sci*. 142:325-339.
- Haverkamp, R., C. Zammit, F. Bouraoui, K. Rajkai, J.L. Arrúe, y N. Heckmann. 1998. GRIZZLY. Grenoble Soil Catalogue: Soil survey of field data and description of particle size, soil water retention and hydraulic conductivity



functions. Laoratoire d'Etude des Transferts en Hydrologie et Environnement (LTHE), Grenoble Cedex 9, France.

Marquardt, D.W., 1963. An algorithm for least-squares estimation of nonlinear parameters. *Journal of the Society for Industrial and Applied Mathematics* 11, 431-441.

U.S. Department of Agriculture (USDA), 1951. Soil survey manual, U.S. Dep. Agric. Agric. Handb., 18, 503 pp.

Van Genuchten, M.Th., 1980. A closed-form equation for predicting the hydraulic conductivity of unsaturated soils. *Soil Sci. Soc. Am. J.*, vol. 44, pp. 892-898.