



III CONGRESO NACIONAL DE RIEGO Y DRENAJE COMEII 2017

Puebla, Pue., del 28 al 30 de noviembre de 2017

ESTIMACIÓN DE LA CURVA DE CONDUCTIVIDAD HIDRÁULICA DEL SUELO A PARTIR DE SU CURVA DE RETENCIÓN DE AGUA

Carlos Fuentes^{1*}; Felipe Zataráin¹

¹Instituto Mexicano de Tecnología del Agua. Paseo Cuauhnáhuac No. 8532, Col. Progreso. 62550 Jiutepec, Morelos. México.

cbfuentesr@gmail.com (*Autor de correspondencia)

Resumen

En el estudio de las transferencias de masa y energía en los suelos con la ley de Darcy, como en los fenómenos de infiltración, drenaje, evaporación y recarga de acuíferos, es de fundamental importancia el conocimiento de las características hidrodinámicas, formadas por la curva de retención de humedad del suelo, $\theta(\psi)$, y la curva de conductividad hidráulica, $K(\psi)$. La primera relaciona el contenido volumétrico de agua (θ) con la presión del agua en el suelo (ψ) y la segunda la conductividad hidráulica (K) con la presión del agua. Para reducir el número de funciones desconocidas, el objetivo del trabajo es establecer relaciones entre las dos curvas utilizando conceptos de la teoría de las probabilidades y de la geometría fractal. Con la introducción de cuatro definiciones del radio de poro en el modelo de la conductividad hidráulica de Fuentes *et al.* (2001) se han obtenido cuatro modelos especiales. En particular se estudian las funciones de conductividad resultantes con las funciones propuestas por Brooks y Corey (1964) y Braddock *et al.* (2001) para representar la curva de retención de humedad. Las funciones propuestas para las características hidrodinámicas pueden ser utilizadas en los estudios del movimiento del agua en los suelos.

Palabras claves adicionales: geometría fractal, propiedades hidrodinámicas, ingeniería de riego.



Introducción

La ley de Darcy (1856) establece que el flujo de agua, en los medios porosos como el suelo, es proporcional al gradiente hidráulico; el coeficiente de proporcionalidad es denominado conductividad hidráulica (K). La ley descubierta inicialmente en el flujo de agua en suelos saturados ha sido generalizada al flujo en suelos no saturados; en el primer caso la conductividad es independiente de la presión del agua, mientras que en el segundo es una función altamente no lineal de la presión (ψ), o del contenido volumétrico de humedad (θ).

En el estudio de los acuíferos, el medio poroso se considera saturado y en la ley de Darcy aparece la conductividad hidráulica a saturación (K_s); debido a la variabilidad espacial de las propiedades del medio, este parámetro es a lo más una función de las coordenadas espaciales. En la zona vadoza el medio es no saturado, la conductividad hidráulica a parte de ser una función de las coordenadas espaciales es una función de la presión del agua, $K(\psi)$; aunado a lo anterior en esta zona es necesario conocer la curva de retención de humedad del suelo, la cual relaciona el contenido volumétrico de agua con la presión del agua, $\theta(\psi)$. Las dos curvas $\theta(\psi)$ y $K(\psi)$ son conocidas como las características hidrodinámicas del suelo y son de fundamental importancia para el estudio de las transferencias de masa y energía en el mismo, como en el estudio de los fenómenos de infiltración, drenaje, evaporación y la recarga de los acuíferos.

Con la finalidad de reducir el número de funciones desconocidas en la zona no saturada del suelo, el objetivo del presente trabajo es el establecimiento de relaciones entre las curvas de retención y de conductividad hidráulica.

Materiales y métodos

Modelo general

En la literatura se ha establecido un modelo conceptual de la conductividad hidráulica basado en la ley de Poiseuille del flujo del agua en tubos capilares (e.g. Mualem y Dagan, 1978; Fuentes, 1992; Fuentes *et al.*, 1996, 1998, 2001). El modelo tiene la forma:

$$K = fC_f \int_{\Omega} (R/T)^2 d\omega \quad (1)$$

donde Ω representa el dominio de los poros llenos con agua; $f = \rho_w g / \eta$ es la fluidez, ρ_w es la densidad del agua, η el coeficiente de viscosidad dinámica del agua, g la aceleración gravitacional, R es el radio de poro, el coeficiente de forma adimensional (C_f) toma en cuenta la forma irregular del perímetro de los poros, en un poro circular $C_f = 1/8$, si R es tomado como el radio hidráulico, C_f es llamado coeficiente de Koseny (Bear, 1972): $C_f = 0.5$ para un círculo; $C_f = 0.562$ para un



cuadrado; $C_f = 0.597$ para un triángulo equilátero; y $C_f = 0.667$ para una placa; T es el factor de tortuosidad definido por $T = dz_f / dz \geq 1$, donde z es la trayectoria rectilínea de las partículas de agua en la dirección macroscópica del movimiento y z_f es la trayectoria real de las partículas; ω es el área efectiva de flujo o porosidad areal parcial.

La definición del área común de flujo es establecida por Fuentes y colaboradores (1992, 1996, 1998, 2001) a partir de la idea probabilista de Childs y Collis-George (1950) y en los conceptos de la geometría fractal. Haciendo un corte perpendicular a la trayectoria macroscópica de flujo se obtienen dos caras, las cuales son ubicadas en las posiciones x , y (figura 1); los radios de los poros en la cara de la posición x son denotados por r y los de la cara en la posición y por ρ . Una partícula de agua ubicada en un poro de la cara x puede continuar su trayectoria por el mismo poro capilar o cambiar a otro de igual o diferente tamaño. La modelación de estas posibilidades de cambio se puede realizar equivalentemente con la introducción de la probabilidad del encuentro de las caras en un punto intermedio z .

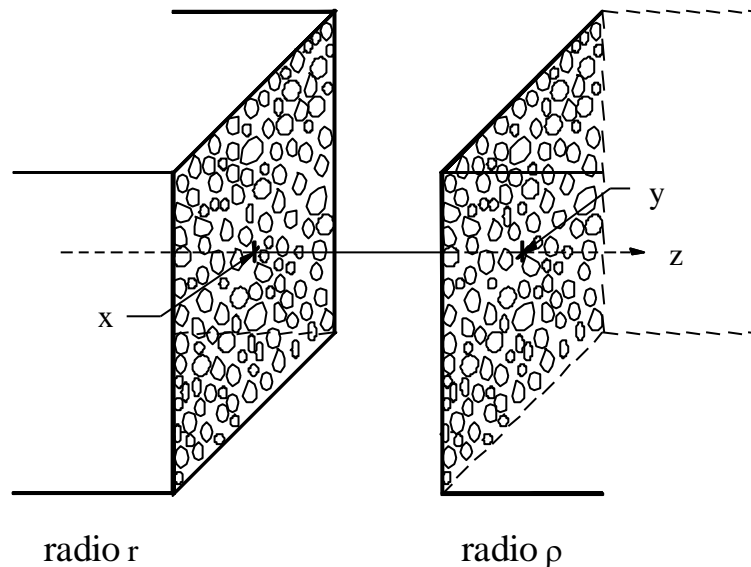


Figura 1. Un corte en el suelo perpendicular a la dirección macroscópica de flujo.

Considerando que la función densidad de la porosidad volumétrica $f(r)$ es la misma en las dos secciones e iguales a la función densidad del área de flujo en cada sección, la probabilidad del intervalo que contiene r es precisamente igual al área representada por $d\theta(r) = f(r)dr$ y la probabilidad del intervalo que contiene a ρ sobre la otra sección es igual a $d\theta(\rho) = f(\rho)d\rho$. La probabilidad de que los poros representados por estos intervalos se encuentren de una manera completamente



aleatoria en una posición z es el producto de las dos probabilidades. El producto de las áreas elementales $d\theta(r)$ y $d\theta(\rho)$ representa el área común de flujo (nótese que r y ρ son los radios de poros perpendiculares a la dirección principal del movimiento): $d\omega(r,\rho) = d\theta(r)d\theta(\rho) = f(r)drf(\rho)d\rho$. La integración de esta ecuación sobre todo el rango del radio de poro permite obtener el área común total de flujo como $\mu = \phi\phi = \phi^2$; donde μ representa la porosidad areal total y ϕ la porosidad volumétrica total, independiente de la dirección macroscópica del movimiento (isotropía).

En un sistema de capilares paralelos la partícula de agua continúa por el mismo poro, se trata de un evento totalmente correlacionado, la porosidad areal es igual a la porosidad volumétrica (ϕ) (Purcell, 1949): $d\omega(r) = d\theta(r) = f(r)dr$; en tal situación: $\mu = \phi$.

En términos probabilísticos el modelo de Purcell representa una correlación completa entre las dos secciones, mientras que el de Childs y Collis-George representa una decorrelación completa; estos dos modelos representan los comportamientos extremos posibles. Mualem y Dagan (1978) señalan que el modelo de Purcell de la conductividad hidráulica puede ser formalmente deducido del modelo de Childs y Collis-George si el área común de flujo es redefinida como: $d\omega(r,\rho) = f(r)dr\delta(\rho - r)d\rho$, donde δ designa la densidad de Dirac.

Es de esperarse que el comportamiento de los suelos se encuentra entre el comportamiento de los suelos de Purcell y Childs y Collis-George. Generalmente el flujo del agua en el suelo no ocurre como en un sistema de capilares paralelos ni tampoco es completamente aleatorio (Millington y Quirk, 1961), ya que hay una geometría del medio que determina el movimiento o que existe una estructura jerarquizada del suelo. Un comportamiento intermedio puede ser obtenido si el suelo es considerado como un objeto fractal (Mandelbrot, 1983; Rieu y Sposito, 1991a,b; Olescko *et al.*, 1997; Fuentes *et al.*, 1998, 2001). Para esto se utilizará la relación entre el área y el volumen de Mandelbrot.

En la geometría de Euclides se tiene que $V \propto L^3$ y $A \propto L^2$, donde V , A y L representan el volumen, el área y una longitud en un objeto, por ejemplo en una esfera $V = \frac{4}{3}\pi r^3$, $A = 4\pi r^2$, $L = r$; puesto que $L \propto V^{1/3}$ se obtiene $A \propto V^{2/3}$. En la geometría fractal $A \propto V^{D/E}$, donde D es la dimensión fractal de la superficie del objeto y $E = 3$ es la dimensión de Euclides del espacio donde el objeto se encuentra embebido. Si $\mu_s = 1 - \mu$ representa el área total relativa de los sólidos, o solidicidad areal total, y $\phi_s = 1 - \phi$ el volumen total relativo, o solidicidad volumétrica total, se tiene: $\mu_s = \phi_s^s$, es decir $1 - \mu = (1 - \phi)^s$, donde $s = D/E$ es la dimensión fractal del suelo relativa a la dimensión euclideana. Siguiendo la idea probabilista, la relación entre las porosidades areal y volumétrica es: $\mu = \phi^s \phi^s = \phi^{2s}$; $s = 1/2$ corresponde al modelo de Purcell y $s = 1$ al modelo de



Childs y Collis-George. El área común de flujo, o porosidad areal parcial, queda definida como:

$$d\omega(r,\rho) = d\theta^s(r)d\theta^s(\rho) \quad (2)$$

Puesto que $\mu_s + \mu = 1$, la relación entre la dimensión fractal relativa y la porosidad volumétrica total está definida implícitamente por la ecuación 3:

$$(1 - \phi)^s + \phi^{2s} = 1 \quad \text{con} \quad s = D/E \quad (3)$$

se puede demostrar que $\mu \leq \phi$, $s \rightarrow 1/2$ cuando $\phi \rightarrow 0$, y $s \rightarrow 1$ cuando $\phi \rightarrow 1$, en otros términos se tiene $1/2 < s < 1$ cuando $0 < \phi < 1$.

En cuanto al factor de tortuosidad, se debe considerar que R es el radio del poro medido perpendicularmente a la trayectoria real de las partículas y $R_s = R/T$ es su proyección en la dirección macroscópica. De acuerdo con la idea probabilista y la fractalidad del medio se tiene $R_s \propto R^s R^s = R^{2s}$, la cual se puede escribir como la igualdad $R_s/R_{s_0} = (R/R_0)^{2s}$ con $R_{s_0} = R_0/T_0$, donde R_0 es un radio de poro de referencia y T_0 la tortuosidad asociada. La expresión resultante del factor de tortuosidad es la siguiente:

$$T(R) = T_0 (R_0/R)^\delta \quad \text{con} \quad 0 < \delta = 2s - 1 < 1 \quad (4)$$

El modelo de la conductividad hidráulica de Fuentes y colaboradores resulta de la introducción de las ecuaciones (2) y (4) en la ecuación (1), y es el siguiente (Fuentes, 1992; Fuentes *et al.*, 1996, 1998, 2001):

$$K = f \frac{C_f R_0^2}{T_0^2 R_0^{4s}} \int_{\Omega} R^{4s}(r,\rho) d\theta^s(r) d\theta^s(\rho) \quad (5)$$

El valor de la conductividad hidráulica a saturación (K_s) se obtiene de la ecuación (5) al reemplazar Ω por el dominio total de los poros, Ω_T . La razón $K_r = K/K_s$ es conocida como conductividad hidráulica relativa.

En el modelo general de la conductividad hidráulica proporcionado por la ecuación (5), se puede incorporar el contenido volumétrico de agua residual (θ_r), definido por Brooks y Corey (1964) de manera que $K(\theta_r) = 0$, reemplazando θ por el contenido volumétrico efectivo de agua $\theta_{ef} = \theta - \theta_r$, y ϕ por la porosidad volumétrica efectiva $\phi_{ef} = \phi - \theta_r$. El exponente s se deberá calcular reemplazando ϕ en la ecuación (3) por la porosidad efectiva (ϕ_{ef}). En otras palabras, el contenido volumétrico de agua residual se adiciona al volumen de los sólidos:



$\phi_{sef} = 1 - \phi_{ef} = \phi_s + \theta_r$. Si se considera que en suelo saturado queda cierta cantidad de aire atrapado la porosidad ϕ puede ser reemplazada por el contenido volumétrico de agua a saturación natural (θ_s).

Modelos especiales

A cada relación entre el radio efectivo $R(r, \rho)$ y los radios r y ρ corresponde un modelo especial de la conductividad hidráulica. Se obtendrán cuatro modelos que corresponden a la adaptación de cuatro relaciones $R(r, \rho)$ que han sido utilizadas en la literatura en diferentes modelaciones de la conductividad hidráulica: i) modelo del *poro pequeño* $R(r, \rho) = \min(r, \rho)$ utilizada por Childs y Collis-George (1950); ii) modelo de la *media geométrica del tamaño de los poros*, o simplemente modelo del *poro geométrico* $R(r, \rho) = \sqrt{r\rho}$ utilizada por Mualem (1976); iii) modelo del *poro neutral* $R(r, \rho) = r$ o $R(r, \rho) = \rho$ que correspondería al modelo tipo Burdine (1953); y iv) modelo del *poro grande* $R(r, \rho) = \max(r, \rho)$ utilizada por Fuentes (1992). Para la integración de la ecuación (5), con las cuatro relaciones precedentes, se siguen las indicaciones generales proporcionadas por Brutsaert (1967); los modelos especiales resultantes son los siguientes:

Modelo del poro pequeño:

$$K = f \frac{2C_f R_o^2}{T_o^2 R_o^{4s}} \int_0^R [\theta^s(R) - \theta^s(r)]^{4s} d\theta^s(r) \quad (6)$$

Modelo del poro geométrico:

$$K = f \frac{C_f R_o^2}{T_o^2 R_o^{4s}} \left[\int_0^R r^{2s} d\theta^s(r) \right]^2 \quad (7)$$

Modelo del poro neutral:

$$K = f \frac{C_f R_o^2}{T_o^2 R_o^{4s}} \theta^s(R) \left[\int_0^R r^{4s} d\theta^s(r) \right] \quad (8)$$

Modelo del poro grande:

$$K = f \frac{2C_f R_o^2}{T_o^2 R_o^{4s}} \int_0^R r^{4s} \theta^s(r) d\theta^s(r) \quad (9)$$

En los modelos anteriores los poros cuyos radios satisfacen $0 < r < R$, son los que están llenos de agua.



Las ecuaciones (7) y (8) pueden reunirse en una sola si se asume $R(r,\rho)=r^\alpha \rho^{1-\alpha}$, donde $0 \leq \alpha \leq 1$; la ecuación (7) se deduce con $\alpha = 1/2$ mientras que la ecuación (8) con $\alpha = 0$ o $\alpha = 1$.

Para obtener funciones específicas a partir de los modelos especiales de la conductividad es necesario proporcionar la función $\theta(R)$. Ésta puede ser obtenida a partir de la curva de retención de humedad del suelo $\theta(\psi)$, que relaciona el contenido volumétrico de agua con la presión del agua en el mismo, utilizando la ley de Laplace que asocia a toda presión un radio de poro. La ley de Laplace puede ser escrita de la manera siguiente:

$$\psi = -\frac{\lambda_L^2}{R} \cos(\alpha_c) \quad (10)$$

donde la escala o número capilar (λ_L) está definida por $\lambda_L = \sqrt{2\sigma/\rho_w g}$ (Landau y Lifchitz, 1989), donde σ es la tensión en la interfaz agua-aire, a una temperatura de 20 °C: $\lambda_L \cong 0.3860$ cm; α_c es el ángulo de contacto formado entre la interfaz y las partículas sólidas, asumido generalmente constante e igual a cero.

De las ecuaciones (6)-(9) se pueden obtener los modelos correspondientes para calcular la conductividad relativa a partir de la curva de retención:

$$\frac{K(\Theta)}{K_s} = \frac{\int_0^\Theta (\Theta^s - \vartheta^s) \frac{\vartheta^{s-1}}{|\psi(\vartheta)|^{4s}} d\vartheta}{\int_0^1 (1 - \vartheta^s) \frac{\vartheta^{s-1}}{|\psi(\vartheta)|^{4s}} d\vartheta} \quad (11)$$

$$\frac{K(\Theta)}{K_s} = \left[\frac{\int_0^\Theta \frac{\vartheta^{s-1}}{|\psi(\vartheta)|^{2s}} d\vartheta}{\int_0^1 \frac{\vartheta^{s-1}}{|\psi(\vartheta)|^{2s}} d\vartheta} \right]^2 \quad (12)$$

$$\frac{K(\Theta)}{K_s} = \Theta^s \left[\frac{\int_0^\Theta \frac{\vartheta^{s-1}}{|\psi(\vartheta)|^{4s}} d\vartheta}{\int_0^1 \frac{\vartheta^{s-1}}{|\psi(\vartheta)|^{4s}} d\vartheta} \right] \quad (13)$$

$$\frac{K(\Theta)}{K_s} = \frac{\int_0^\Theta \frac{\vartheta^{2s-1}}{|\psi(\vartheta)|^{4s}} d\vartheta}{\int_0^1 \frac{\vartheta^{2s-1}}{|\psi(\vartheta)|^{4s}} d\vartheta} \quad (14)$$

donde $\Theta = (\theta - \theta_r)/(\theta_s - \theta_r)$ es un grado efectivo de saturación.



Análisis y discusión de resultados

Ecuación de Brooks y Corey

La ecuación propuesta por Brooks y Corey (1964) para representar la curva de retención es la siguiente:

$$\Theta = (\psi_{cr}/\psi)^\lambda \quad (15)$$

si $\psi < \psi_{cr}$, y $\Theta = 1$ si $\psi_{cr} \leq \psi$; donde ψ_{cr} es una escala de la presión y $\lambda > 0$ un índice de la distribución de los poros.

La introducción de la ecuación (15) en las ecuaciones (11)-(14) permite obtener la misma expresión para la conductividad relativa

$$K(\Theta)/K_s = \Theta^{2s(2/\lambda+1)} \quad (16)$$

La conductividad hidráulica a saturación es la siguiente:

$$K_s = fC_f(\theta_s - \theta_r)^{2s}(R_o/T_o)^2 \Lambda \quad (17)$$

donde $R_o = \lambda_L(\lambda_L/|\psi_{cr}|)$. El factor de ponderación Λ es diferente para cada modelo: del poro pequeño, $\Lambda_p = 1/[2(2/\lambda + 1/2)(2/\lambda + 1)]$; del poro geométrico $\Lambda_g = 1/(2/\lambda + 1)^2$; del poro neutral $\Lambda_N = 1/[2(2/\lambda + 1/2)]$; y del poro grande $\Lambda_G = 1/(2/\lambda + 1)$. Se puede verificar que se satisfacen las desigualdades $\Lambda_p < \Lambda_g < \Lambda_N < \Lambda_G$, las igualdades corresponden a los extremos ($\lambda \rightarrow 0, \infty$). Cuando $\lambda \rightarrow 0$ se tiene: $\Lambda_p = \lambda^2/8 < \Lambda_g = \lambda^2/4 < \Lambda_N = \lambda/4 < \Lambda_G = \lambda/2$. Los valores correspondientes de la conductividad hidráulica a saturación satisfacen las desigualdades: $K_{sp} < K_{sg} < K_{sN} < K_{sG}$.

Función potencial general

Uno de los grupos más grandes de modelos presentados en la literatura para la curva de retención es el modelo en función potencia siguiente (Braddock *et al.*, 2001):

$$\psi = \psi_d \Theta^{-1/\lambda} (1 - \Theta^{1/m})^{1/n} \quad (18)$$

donde ψ_d es un parámetro de escala de la presión y $m > 0$, $n > 0$ y $\lambda > 0$ son tres parámetros de forma.



En la ecuación (18) se debe notar que cuando $\Theta \rightarrow 0$ se obtiene la ecuación de Brooks y Corey (1964), ecuación (15), y cuando $\lambda = mn$ se obtiene la ecuación de van Genuchten (1980):

$$\Theta(\psi) = \left[1 + (\psi/\psi_d)^n \right]^{-m} \quad (19)$$

La introducción de la ecuación (18) en la ecuaciones (11)-(14) conduce respectivamente a:

$$\frac{K(\Theta)}{K_s} = \frac{\Theta^s B_1(\Theta^{1/m}; 4sm/\lambda + sm, 1 - 4s/n) - B_1(\Theta^{1/m}; 4sm/\lambda + 2sm, 1 - 4s/n)}{B(4sm/\lambda + sm, 1 - 4s/n) - B(4sm/\lambda + 2sm, 1 - 4s/n)} \quad (20)$$

$$K(\Theta)/K_s = \left[\beta_1(\Theta^{1/m}; 2sm/\lambda + sm, 1 - 2s/n) \right]^2 \quad (21)$$

$$K(\Theta)/K_s = \Theta^s \beta_1(\Theta^{1/m}; 4sm/\lambda + sm, 1 - 4s/n) \quad (22)$$

$$K(\Theta)/K_s = \beta_1(\Theta^{1/m}; 4sm/\lambda + 2sm, 1 - 4s/n) \quad (23)$$

donde $\beta_1(x; p, q) = B_1(x; p, q)/B(p, q)$, en la cual $n > 4s$ es la función beta incompleta de variable x , y parámetros $p > 0$ y $q > 0$; $B(p, q) = B_1(1; p, q)$ es la función beta completa.

Se pueden obtener expresiones analíticas cerradas aceptando la idea de van Genuchten (1980) que consiste en asignar valores enteros al parámetro p de la función beta y siguiendo la recomendación de escoger $p = 1$. Lo anterior conduce necesariamente a imponer relaciones entre los parámetros de forma de la curva de retención. Puesto que la relación entre los parámetros debe ser única, esta técnica es aplicable a los modelos definidos por las ecuaciones (21), (22) y (23). En la ecuación (20) se pueden obtener formas cerradas de la primera o de la segunda integral del numerador resultando en fórmulas cerradas incompletas (o "semicerradas") de la conductividad.

El modelo del poro pequeño:

$$\frac{K(\Theta)}{K_s} = \frac{\Theta^s B_1(\Theta^{1/m}; 1, 1 - 4s/n) - B_1(\Theta^{1/m}; 1 + sm, 1 - 4s/n)}{B(1, 1 - 4s/n) - B(1 + sm, 1 - 4s/n)}, \quad \lambda = \frac{4sm}{1 - sm} \quad (24.1)$$

$$\frac{K(\Theta)}{K_s} = \frac{\Theta^s B_1(\Theta^{1/m}; 1 - sm, 1 - 4s/n) - B_1(\Theta^{1/m}; 1, 1 - 4s/n)}{B(1 - sm, 1 - 4s/n) - B(1, 1 - 4s/n)}, \quad \lambda = \frac{4sm}{1 - 2sm} \quad (24.2)$$

con $n > 4s$ y $B_1(\Theta^{1/m}; 1, 1 - 4s/n) = (1 - 4s/n)^{-1} \left[1 - (1 - \Theta^{1/m})^{1 - 4s/n} \right]$.



Modelo del poro geométrico:

$$K(\Theta)/K_s = \left[1 - \left(1 - \Theta^{1/m}\right)^{1-2s/n}\right]^2, \quad \lambda = \frac{2sm}{1-sm} \quad (25)$$

con $n > 2s$.

Modelo del poro neutral:

$$K(\Theta)/K_s = \Theta^s \left[1 - \left(1 - \Theta^{1/m}\right)^{1-4s/n}\right], \quad \lambda = \frac{4sm}{1-sm} \quad (26)$$

con $n > 4s$.

Modelo del poro grande:

$$K(\Theta)/K_s = 1 - \left(1 - \Theta^{1/m}\right)^{1-4s/n}, \quad \lambda = \frac{4sm}{1-2sm} \quad (27)$$

con $n > 4s$.

Es de notarse que las curvas de retención inducidas por las ecuaciones (24.1) y (24.2) son iguales respectivamente a las inducidas por las ecuaciones (26) y (27).

La utilización de los modelos (24)-(27) reduce el número de parámetros de forma de la curva de retención definida por la ecuación (18): los tres parámetros independientes $\{m, n, \lambda\}$ se reducen a dos $\{m, n\}$.

Los parámetros de forma pueden incluso ser reducidos a uno. Si se asume $\lambda = mn$ en la ecuación (18) se obtiene la fórmula de van Genuchten (1980), ecuación (19), la cual explicita la relación $\Theta(\psi)$ y en donde los parámetros de forma $\{m, n\}$ todavía son independientes.

Si se aceptan las relaciones entre λ y m utilizadas para obtener las ecuaciones (24)-(27), la ecuación (18) tendrá un sólo parámetro de forma (m). Los modelos correspondientes de la conductividad asociados a la ecuación de van Genuchten con un parámetro de forma son los siguientes:

El modelo del poro pequeño:

$$\frac{K(\Theta)}{K_s} = \frac{\Theta^s B_1(\Theta^{1/m}; 1, sm) - B_1(\Theta^{1/m}; 1+sm, sm)}{B(1, sm) - B(1+sm, sm)}, \quad 0 < sm = 1 - 4s/n < 1 \quad (28.1)$$



$$\frac{K(\Theta)}{K_s} = \frac{\Theta^s B_1(\Theta^{1/m}; 1 - sm, sm) - B_1(\Theta^{1/m}; 1, sm)}{B(1 - sm, sm) - B(1, sm)}, \quad 0 < 2sm = 1 - 4s/n < 1 \quad (28.2)$$

Modelo del poro geométrico:

$$K(\Theta)/K_s = \left[1 - (1 - \Theta^{1/m})^{sm} \right]^2, \quad 0 < sm = 1 - 2s/n < 1 \quad (29)$$

Modelo del poro neutral:

$$K(\Theta)/K_s = \Theta^s \left[1 - (1 - \Theta^{1/m})^{sm} \right], \quad 0 < sm = 1 - 4s/n < 1 \quad (30)$$

Modelo del poro grande:

$$K(\Theta)/K_s = 1 - (1 - \Theta^{1/m})^{2sm}, \quad 0 < 2sm = 1 - 4s/n < 1 \quad (31)$$

En Fuentes *et al.* (2003) se presenta una evaluación de la capacidad de predicción de la conductividad hidráulica relativa proporcionada por las ecuaciones (28)-(31), en cincuenta suelos de la base Grizzly de Haverkamp *et al.* (1997). La comparación entre la conductividad hidráulica relativa experimental y predicha ha permitido demostrar que los diferentes modelos pueden ser utilizados para estimar la conductividad hidráulica relativa.

Conclusiones

El modelo fractal de la conductividad hidráulica propuesto por Fuentes y colaboradores ha sido deducido de una manera directa, utilizando conceptos probabilistas clásicos y de la relación área-volumen de la geometría fractal. La introducción de cuatro definiciones del radio de poro que interviene en el modelo general ha permitido establecer cuatro modelos especiales de la conductividad hidráulica.

La función propuesta por Brooks y Corey (1964) para representar la curva de retención de humedad conduce a una función en potencia general para representar la conductividad hidráulica relativa. La diferencia entre los modelos consiste en la predicción de la conductividad hidráulica a saturación.

Se ha estudiado una función potencial general con tres parámetros de forma para representar la curva de retención, reportada por Braddock *et al.* (2001), la cual contiene como caso particular a la ecuación de Brooks y Corey con un parámetro de forma y a la ecuación de van Genuchten con dos parámetros de forma. Con esta función se han obtenido formas cerradas de la conductividad hidráulica con dos y un parámetro de forma.



La función potencial general de la curva de retención y las formas cerradas de la conductividad hidráulica, obtenidas a partir de los modelos fractales especiales, pueden ser utilizadas para el estudio de las transferencias de masa y energía en el suelo, como en los fenómenos de infiltración, drenaje, evaporación y recarga de acuíferos.

Referencias bibliográficas

- Bear J., 1972. Dynamics of fluids in porous media. Dover Publications, Inc., New York. 764 p.
- Brooks R. H., y A. T. Corey, 1964. Hydraulic properties of porous media. Hydrol. Pap. 3, Colo. State Univ., Fort Collins.
- Brutsaert W., 1967. Some methods of calculating unsaturated permeability. Trans. ASAE, 10: 400-404.
- Burdine N. T., 1953. Relative permeability calculation from size distribution data. Trans. AIME, 198: 71-78.
- Childs E. C., y N. Collis-George, 1950. The permeability of porous materials. Proc. Roy. Soc., Ser. A(201): 392-405.
- Darcy H., 1856. Les fontaines publiques de la ville de Dijon. Dalmont, Paris.
- Dullien F. A. L., 1979. Porous Media, fluid transport and pore structure. Academic Press, New York.
- Fuentes C., 1992. Approche fractale des transferts hydriques dans les sols non-saturés. Tesis de Doctorado por la Université Joseph Fourier de Grenoble, France. 267 p.
- Fuentes C., M. Vauclin, J.-Y. Parlange, y R. Haverkamp. 1996. A note on the soil-water conductivity of a fractal soil. Transport in Porous Media 23: 31-36.
- Fuentes C., M. Vauclin, J.-Y. Parlange, y R. Haverkamp, 1998. Soil-water conductivity of a fractal soil. En Fractals in Soil Science, editado por Ph. Baveye, J.-Y. Parlange y B.A. Stewart. CRC press, Boca Raton: 333-340.
- Fuentes C., F. Brambila, M. Vauclin, J.-Y. Parlange, y R. Haverkamp, 2001. Modelación fractal de la conductividad hidráulica de los suelos no saturados. Ingeniería Hidráulica en México, 16(2): 119-137.
- Fuentes C., A.C.D. Antonino, J. Sepúlveda, F. Zataráin, y B. de León, 2004. Predicción de la conductividad hidráulica relativa con modelos fractales. Ingeniería Hidráulica en México, 18(4): 31-40.
- Haverkamp R., C. Zammit, F. Bouraoui, K. Rajkai, J.L. Arrúe, y N. Heckmann, 1997. GRIZZLY, Grenoble Soil Catalogue: Soil survey of field data and description of particle size, soil water retention and hydraulic conductivity functions. Laboratoire d'Étude des Transferts en Hydrologie et Environnement (LTHE), Grenoble Cedex 9, Francia.
- Landau L., y E. Lifchitz, 1989. Physique théorique. Tome 6: Mécanique des fluides. Seconde édition, éditions Mir, Moscou. 748 p.
- Mandelbrot B. B., 1983. The fractal geometry of nature. Freeman, San Francisco.
- Millington R. J., y J. P. Quirk, 1961. Permeability of porous solids. Trans. Faraday Soc. 57: 1200-1206.
- Mualem Y., 1976. A new model for predicting the hydraulic conductivity of unsaturated porous media. Water Resources Res. 12: 513-522.



- Mualem Y., y G. Dagan, 1978. Hydraulic conductivity of soils: unified approach to the statistical models. *Soil Sci. Soc. Am. J.* 42: 392-395.
- Oleschko K., C. Fuentes, F. Brambila, y R. Álvarez, 1997. Linear fractal análisis of three mexican soils in different management systems. *Soil Technology*, 10(3): 185-206.
- Purcell W. R., 1949. Capillary pressures- their measurement using mercury and the calculation of permeability thereform. *Petr. Trans. Amer. Inst. Mining Metallurgical Engrs.*, 186: 39-48.
- Rieu M., y G. Sposito, 1991a. Fractal fragmentation, soil porosity, and soil water properties: I. Theory. *Soil Sci. Soc. Am. J.*, 55: 1231-1238.
- Rieu M., y G. Sposito, 1991b. Fractal fragmentation, soil porosity, and soil water properties: II. Applications. *Soil Sci. Soc. Am. J.*, 55: 1239-1244.
- Van Genuchten M.T., 1980. A closed-form equation for predicting the hydraulic conductivity of unsaturated soils. *Soil Sci. Soc. Am. J.*, 44: 892-898.