

MODELACIÓN DE LA INFILTRACIÓN DEL RIEGO POR GRAVEDAD UTILIZANDO LA ECUACIÓN DE RICHARDS EN 3D

Juan Carlos Mota
Facultad de Ingeniería, UAQ

II Congreso Nacional de Riego y Drenaje COMEI 2016
08 al 10 de septiembre del 2016
Chapingo, México

- Introducción
 - Ecuación de Richards
 - Características hidrodinámicas
- Dominio
- Ecuación de Richards en diferencias finitas
- Resultados
- Conclusión
- Bibliografía

INTRODUCCIÓN (ECUACIÓN DE RICHARDS)



Cambio de la cantidad de
agua respecto de la presión

$$C(\Psi) \frac{\partial \Psi}{\partial t} = \nabla (K(\Psi) \cdot \nabla \Psi) - \frac{\partial K}{\partial z} - \Upsilon$$

Cambio de la presión
respecto del tiempo

Efectos de la
presión
(capilaridad)

Efectos de la
gravedad

Término de
fuente/sumidero

INTRODUCCIÓN (ECUACIÓN DE RICHARDS)



$$C(\Psi) \frac{\partial \Psi}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left(K(\Psi) \frac{\partial \Psi}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(K(\Psi) \frac{\partial \Psi}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(K(\Psi) \frac{\partial \Psi}{\partial z} \right) - \frac{\partial K(\Psi)}{\partial z}$$

$\Psi = \Psi(x, y, z)$ Presión en (x, y, z)

t Tiempo

$C(\Psi)$ Función de capacidad específica

x, y Coordenada espacial horizontal

$K(\Psi)$ Función de conductividad hidráulica

z Coordenada espacial vertical (profundidad)

CURVA DE HUMEDAD (VAN GENUTCHEN)



$$\theta(\Psi) = \theta_r + \frac{\theta_s - \theta_r}{\left(1 + \left(\frac{\Psi}{\Psi_d}\right)^n\right)^m}$$

$$C(\Psi) = \frac{\partial \theta}{\partial \Psi}$$

$\theta(\Psi)$

Cantidad de agua
respecto de la presión

Ψ_d

Valor característico
de la presión

θ_s

Cantidad de agua
a saturación

m, n

Parámetros
de forma

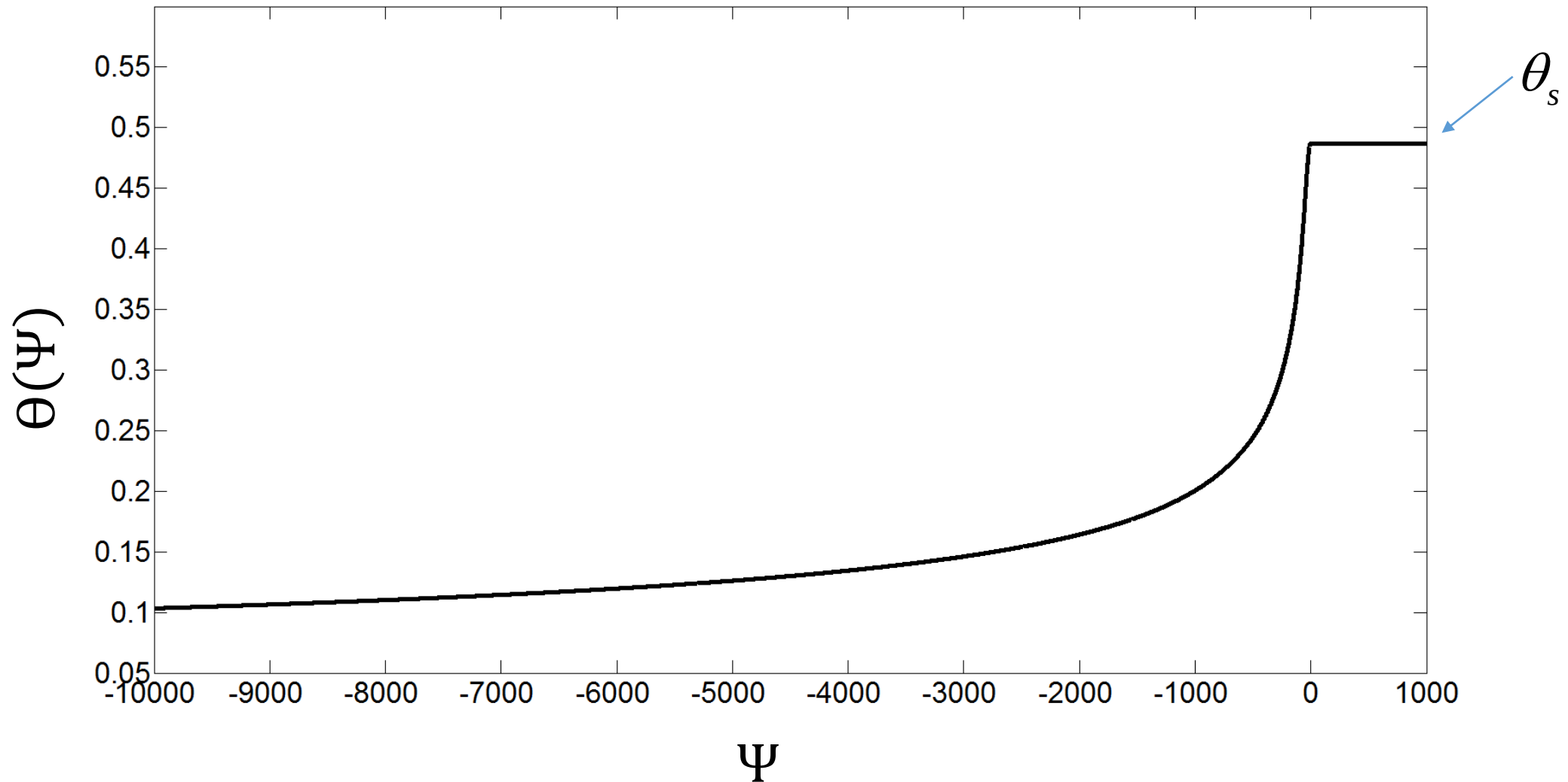
θ_r

Cantidad residual
de agua

Ψ

Presión

CURVA DE HUMEDAD (VAN GENUTCHEN)



CONDUCTIVIDAD HIDRÁULICA(BROOKS Y COREY)



$$K(\theta) = K_s \left(\frac{\theta - \theta_r}{\theta_s - \theta_r} \right)^\eta$$

 θ

Cantidad de agua

 K_s

Conductividad
hidráulica a saturación

 θ_s

Cantidad de agua
a saturación

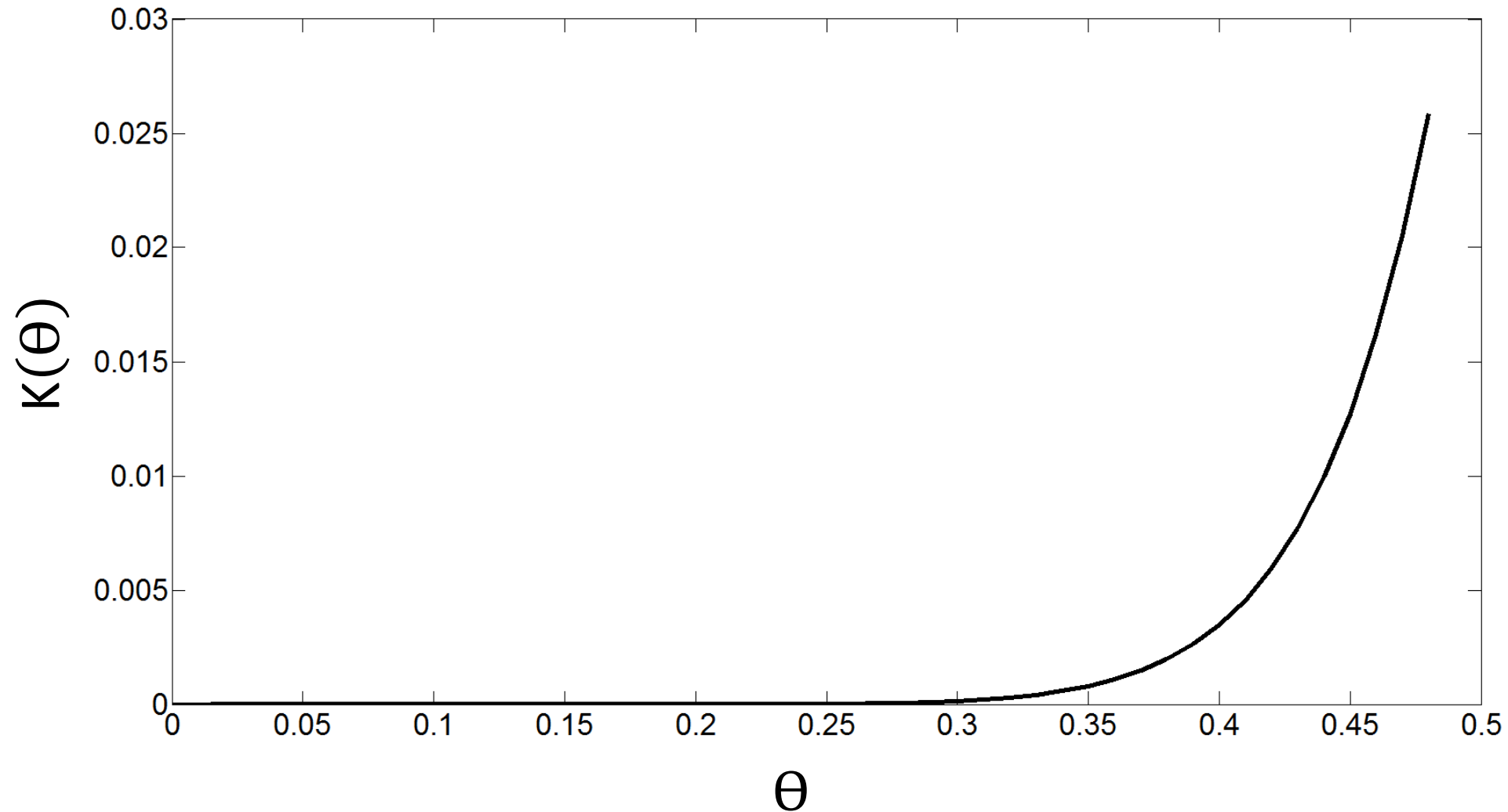
 η

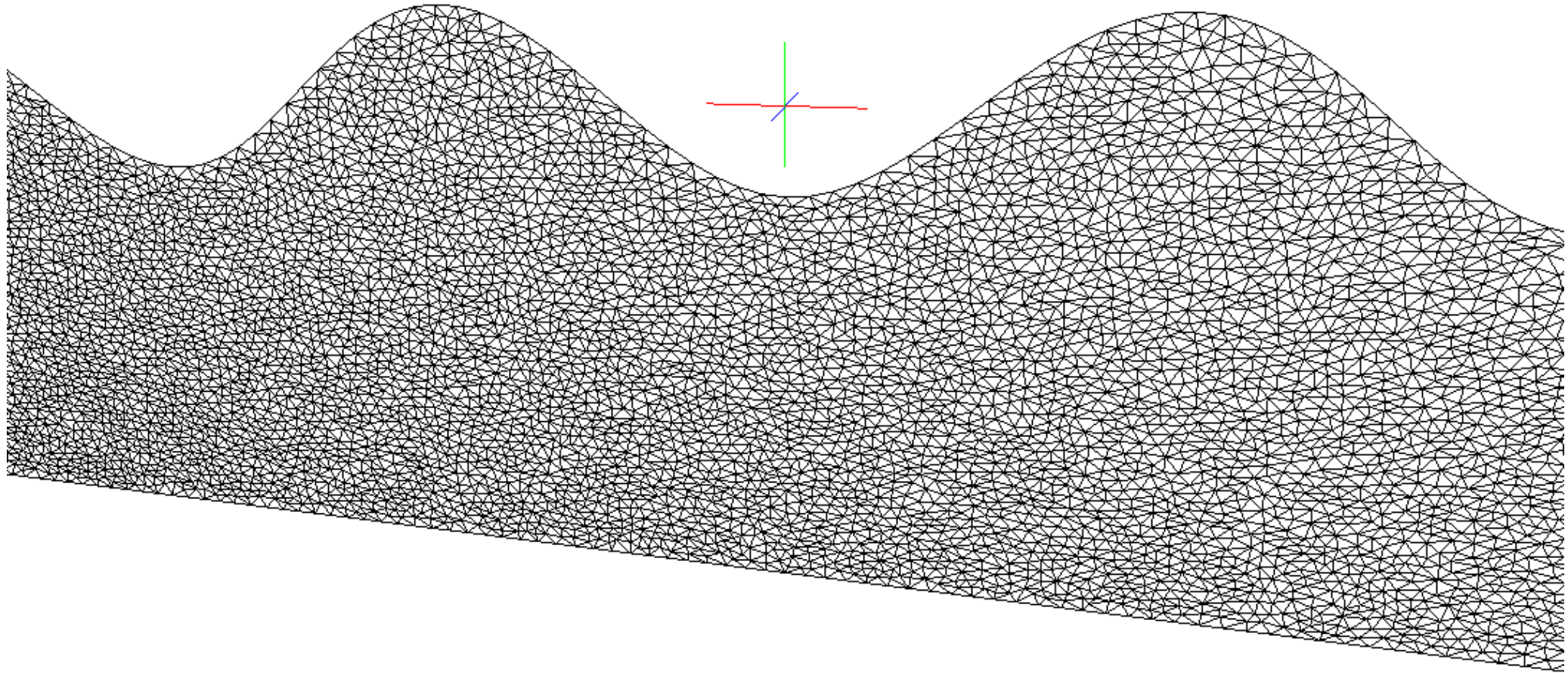
Parámetro
de forma

 θ_r

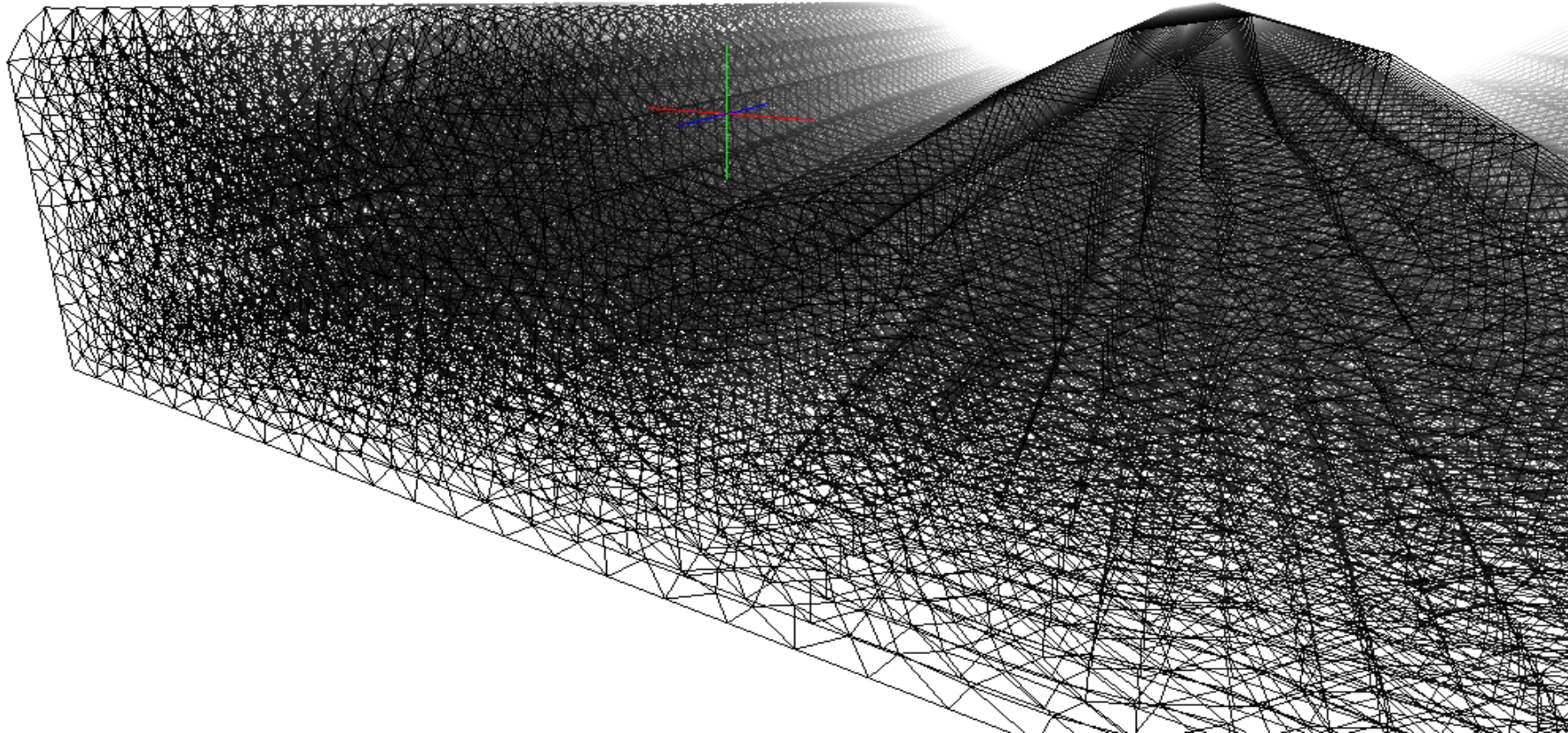
Cantidad residual
de agua

CONDUCTIVIDAD HIDRÁULICA(BROOKS Y COREY)





Discretización 2D de un dominio tipo surco. Notar que el plano está proyectado desde tres dimensiones.



Discretización 3D de un dominio tipo surco obtenido a partir de su discretización 2D.



Definiendo $\Psi(t_k)$ como la presión en el tiempo t_k , la ecuación de Richards se transforma en:

$$C(\Psi(t_k)) \frac{\partial \Psi(t_k)}{\partial t_k} = \frac{\partial}{\partial x} \left(K(\Psi(t_k)) \frac{\partial \Psi(t_k)}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(K(\Psi(t_k)) \frac{\partial \Psi(t_k)}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(K(\Psi(t_k)) \frac{\partial \Psi(t_k)}{\partial z} \right) - \frac{\partial K(\Psi(t_k))}{\partial z}$$

Discretización de la derivada temporal de la ecuación de Richards:

Esquema explícito:

$$C(\Psi(t_k)) \frac{\Psi(t_{k+1}) - \Psi(t_k)}{t_{k+1} - t_k} = \frac{\partial}{\partial x} \left(K(\Psi(t_k)) \frac{\partial \Psi(t_k)}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(K(\Psi(t_k)) \frac{\partial \Psi(t_k)}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(K(\Psi(t_k)) \frac{\partial \Psi(t_k)}{\partial z} \right) - \frac{\partial K(\Psi(t_k))}{\partial z}$$

Esquema implícito:

$$C(\Psi(t_k)) \frac{\Psi(t_k) - \Psi(t_{k-1})}{t_k - t_{k-1}} = \frac{\partial}{\partial x} \left(K(\Psi(t_k)) \frac{\partial \Psi(t_k)}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(K(\Psi(t_k)) \frac{\partial \Psi(t_k)}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(K(\Psi(t_k)) \frac{\partial \Psi(t_k)}{\partial z} \right) - \frac{\partial K(\Psi(t_k))}{\partial z}$$

Definiendo:

$$Op(\Psi(t_k)) = \frac{\partial}{\partial x} \left(K(\Psi(t_k)) \frac{\partial \Psi(t_k)}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(K(\Psi(t_k)) \frac{\partial \Psi(t_k)}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(K(\Psi(t_k)) \frac{\partial \Psi(t_k)}{\partial z} \right) - \frac{\partial K(\Psi(t_k))}{\partial z}$$

El esquema explícito y el esquema implícito adquieren la siguiente forma:

$$C(\Psi(t_k)) \frac{\Psi(t_{k+1}) - \Psi(t_k)}{t_{k+1} - t_k} = Op(\Psi(t_k))$$

$$C(\Psi(t_k)) \frac{\Psi(t_k) - \Psi(t_{k-1})}{t_k - t_{k-1}} = Op(\Psi(t_k))$$

Solución para el esquema explícito:

$$\Psi(t_{k+1}) = \frac{t_{k+1} - t_k}{C(\Psi(t_k))} Op(\Psi(t_k)) + \Psi(t_k)$$

$C(\Psi)$ es cero en la zona
saturada

Función de error a optimizar dado el esquema implícito:

$$E(\Psi(t_k)) = \left\| C(\Psi(t_k)) \frac{\Psi(t_k) - \Psi(t_{k-1})}{t_k - t_{k-1}} - Op(\Psi(t_k)) \right\|$$

Para solucionar los operadores de derivación espaciales en un punto k de la discretización espacial, se encuentra el hiperplano:

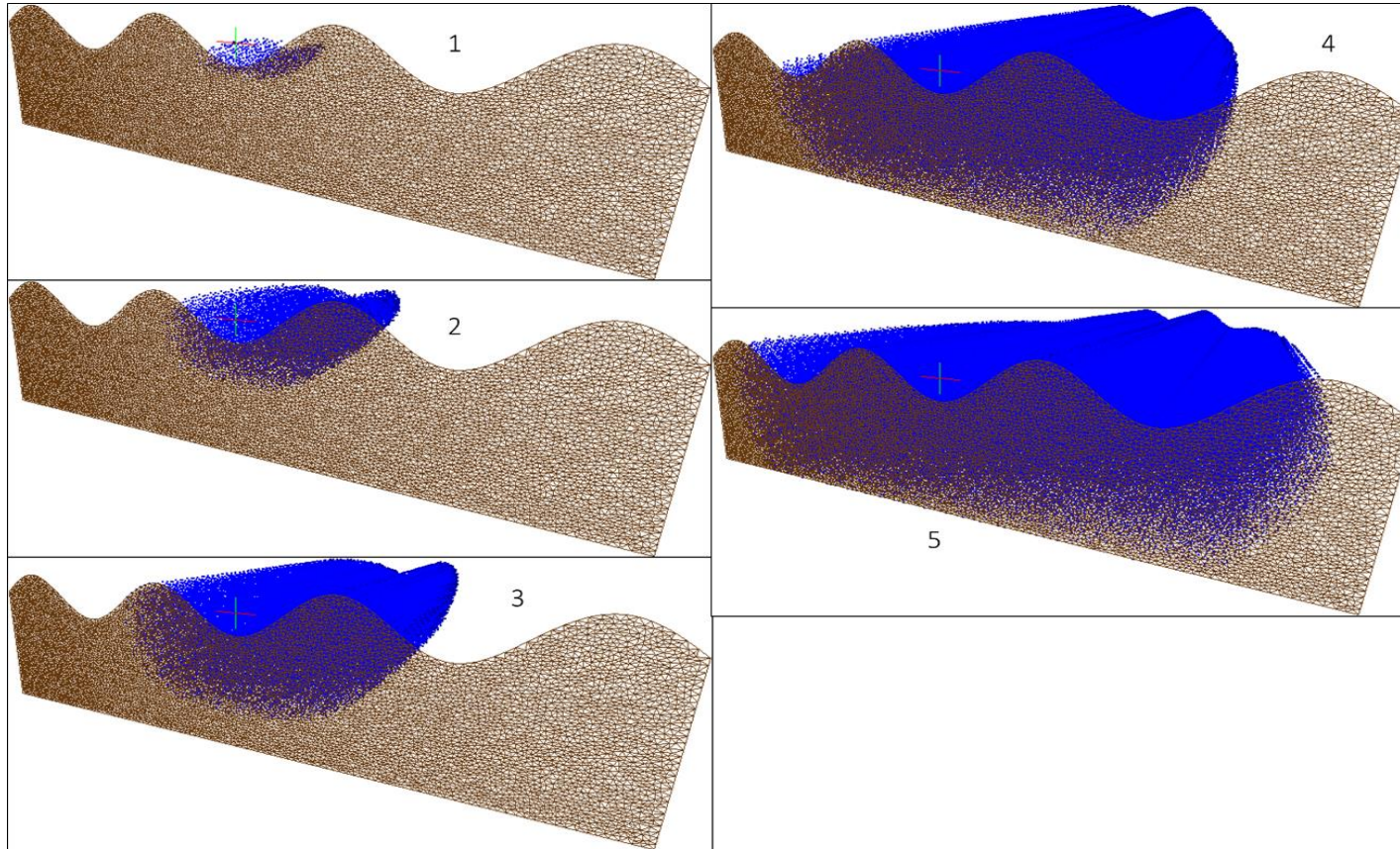
$$f(x, y, z) = ax + by + cz + d$$

que mejor aproxime los puntos alrededor de k .

Con la función f , se puede derivar hacia cualquier dirección y así encontrar $Op(\Psi)$ en el punto k .

El método anterior se puede aplicar a curvas de mayor grado que los hiperplanos.

RESULTADOS



$$\theta_r = 0.0000 \text{ cm}^3/\text{cm}^3$$

$$\theta_s = 0.4865 \text{ cm}^3/\text{cm}^3$$

$$K_s = 1.8400 \text{ cm/h}$$

$$\Psi_d = -45.9000 \text{ cm}$$

$$m = 0.1258$$

Vista de la infiltración en cinco tiempos diferentes: 0, 40, 80, 120, 160, 200 minutos de infiltración.

CONCLUSIONES



El fenómeno de infiltración en un dominio tridimensional puede ser modelado y resuelto mediante el método de diferencias finitas junto con el gradiente conjugado para problemas no lineales. Con los resultados obtenidos en cada simulación se puede observar la cantidad de agua que se va hacia capas profundas; así el tiempo en el que tarda en llegar una determinada concentración de agua a la parte superior del surco.

- Brooks, R. H., y Corey, A. T. 1964. Hydraulic properties of porous media and their relation to drainage design. Transactions of the ASAE, 7(1), 26-0028.
- Burdine, N. 1953. Relative permeability calculations from pore size distribution data. Journal of Petroleum Technology, 5(03), 71-78.
- Delaunay, B. 1934. Sur la sphere vide. Izv. Akad. Nauk SSSR, Otdelenie Matematicheskii i Estestvennyka Nauk, 7(793-800), 1-2.
- López Avendano, J. E., Palacios Vélez, O. L., Fuentes Ruíz, C., Rendón Pimentel, L., y García Villanueva, N. H. 1997. Bidimensional analysis on infiltration in furrow irrigation. Agrociencia .
- Richards, L. A. 1931. Capillary conduction of liquids through porous mediums. Journal of Applied Physics, 1(5), 318-333.
- Saucedo, H., Zavala, M., y Fuentes, C. 2011. Modelo hidrodinámico completo para riego por melgas. Tecnología y ciencias del agua, 2(2), 23-38.
- Van Genuchten, M. T. 1980. A closed-form equation for predicting the hydraulic conductivity of unsaturated soils. Soil science society of America journal, 44(5), 892-898.
- Zavala Trejo, M., Fuentes Ruíz, C., y Saucedo Rojas, H. E. 2005. Radiación no lineal en la ecuación de Richards bidimensional aplicada al drenaje agrícola subterráneo. Ingeniería hidráulica en México, vol. XX, núm. 4, pp. 111-119.



GRACIAS