



MODELO DE CONDICIÓN INICIAL DE FLUJO EN TRANSICIONES

Edwin Jonathan Pastrana¹, Ariosto Aguilar Chávez², Penélope Cruz Mayo³

¹Posgrado Ingeniería Civil/Hidráulica-UNAM-Campus Morelos. Paseo Cuauhnáhuac No. 8532, Jiutepec, Morelos. jona_19_99@hotmail.com

²Subcoordinador de Posgrado, IMTA. Paseo Cuauhnáhuac No. 8532, Jiutepec, Morelos.

³Posgrado Ingeniería Civil/Hidráulica-UNAM-Campus Morelos. Paseo Cuauhnáhuac No. 8532, Jiutepec, Morelos.

II Congreso Nacional de Riego y Drenaje COMET 2016
08 al 10 de septiembre del 2016
Chapingo, México

INTRODUCCIÓN



En el diseño hidráulico de canales a superficie libre, con frecuencia se requiere modificar la forma y las dimensiones de la sección transversal, con el fin de satisfacer requerimientos hidráulicos o topográficos. Es por esto, que es de suma importancia conocer los valores que toman las variables hidráulicas, tales como: el tirante y la velocidad iniciales en todas las secciones del sistema.

ECUACIONES DE SAINT-VENANT

Las ecuaciones generales que describen el comportamiento de flujos unidimensionales a superficie libre en cauces naturales o artificiales.

Las *ecuaciones de Saint-Venant en su versión integrodiferencial* (Cunge *et al.*, 1980) son:

Ecuación de conservación de masa

$$\mathcal{L}(A, Q; x, t) = \frac{\partial A}{\partial t} + \frac{\partial Q}{\partial x} = 0$$

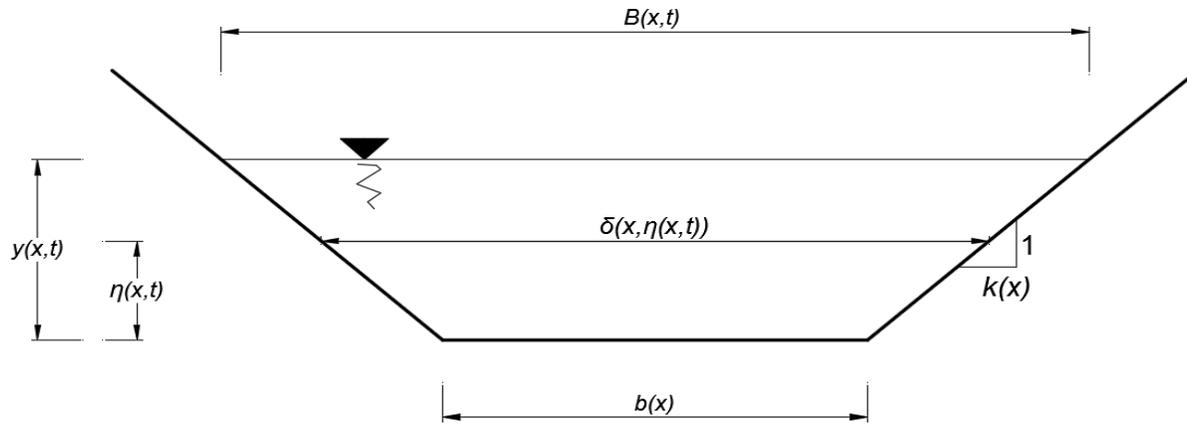
Ecuación de cantidad de movimiento

$$\mathcal{M}(A, Q; x, t) = \frac{\partial Q}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{Q^2}{A} \right) + g \frac{\partial I_1(A; x, t)}{\partial x} - g I_2(A; x, t) + g A [S_f(A, Q; x, t) - S_o] = 0$$

donde

$$I_1(A; x, t) = \int_0^{y(A; x, t)} [y(A; x, t) - \eta] \delta(x, \eta) d\eta \quad I_2(A; x, t) = \int_0^{y(A; x, t)} [y(A; x, t) - \eta] \frac{\partial \delta}{\partial x} \Big|_{(x, \eta)} d\eta$$

ANÁLISIS DE LOS TÉRMINOS INTEGRODIFERENCIALES



$$\delta(x, t) = b + 2k\eta$$

$$\left. \frac{\partial \delta}{\partial x} \right|_{(x, \eta)} = \frac{\partial b}{\partial x} + 2 \frac{\partial k}{\partial x} \eta$$

Entonces

$$I_1(x, t) = y^2(x, t) \left[\frac{b(x)}{2} + y(x, t) \frac{k(x)}{3} \right] \quad ; \quad I_2(x, t) = y^2(x, t) \left[\frac{1}{2} \frac{\partial b}{\partial x} + \frac{y(x, t)}{3} \frac{\partial k}{\partial x} \right]$$



MODELO DE CONDICIÓN INICIAL

A partir de las ecuaciones de conservación de masa y cantidad de movimiento se obtiene la ecuación que describe el flujo en estado permanente. La condición inicial se tiene para $\frac{\partial (\cdot)}{\partial t} = 0$, entonces las ecuaciones de Saint-Venant se expresan de la forma siguiente:

$$\mathcal{L}(A, Q; x, 0) = \frac{dQ}{dx} = 0$$

$$\mathcal{M}(A, Q; x, 0) = \frac{d}{dx} \left(\frac{Q^2}{A} \right) + gA(x) \frac{dy}{dx} + gA(S_f - S_o) = 0$$

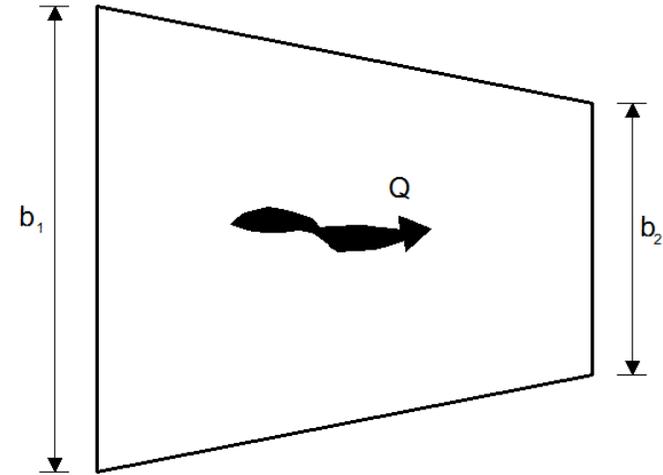
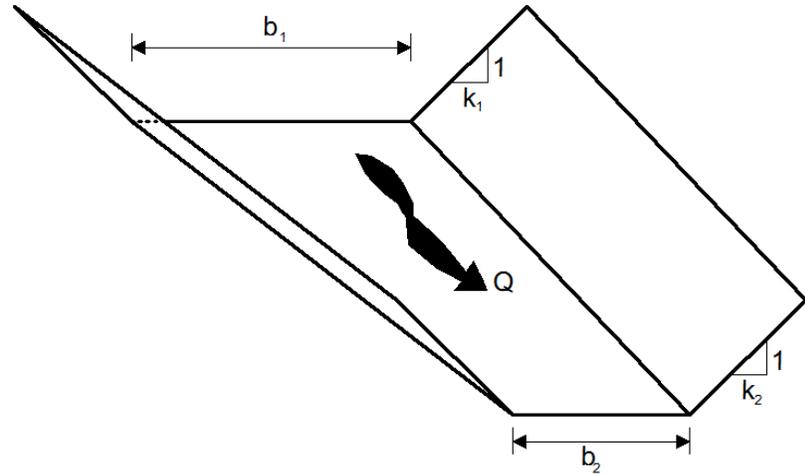
Desarrollando el primer término de la ecuación de cantidad de movimiento

$$\frac{d}{dx} \left(\frac{Q^2}{A} \right) = \frac{2Q}{A} \frac{dQ}{dx} - \frac{Q^2}{A^2} \frac{dA}{dx} = - \frac{Q^2}{A^2} \frac{dA(y(x))}{dx}$$

$$A(x) = b(x)y(x) + k(x)y(x)^2$$

Aplicando la regla de la cadena al término $\frac{dA(y(x))}{dx}$ (W. Jeppson, 1974).

$$\frac{dA(b, k, y(x))}{dx} = \frac{\partial A}{\partial b} \frac{db}{dx} + \frac{\partial A}{\partial k} \frac{dk}{dx} + \frac{\partial A}{\partial y} \frac{dy}{dx}$$



Finalmente sustituyendo y despejando el termino que evalúa las variaciones de nivel de flujo a lo largo de la conducción $\frac{dy}{dx}$.

donde Fr , es el número de Froude

$$\frac{dy}{dx} = \frac{S_o - S_f + \frac{Q^2}{gA^3} \left[y \frac{db}{dx} + y^2 \frac{dk}{dx} \right]}{1 - Fr^2}$$

$$Fr = \frac{U(x)}{\sqrt{g \frac{A(y; x)}{B(y; x)}}}$$

Para solucionar el problema planteado se propone aplicar el método numérico de disparo inicial de Runge-Kutta de cuarto orden (RK4) (Neuman, 2001, Burden & Faires, 2002)

$$y_{i+1} = y_i + \frac{h}{6} [k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4],$$



PRUEBAS DEL MODELO DE CONDICIÓN INICIAL

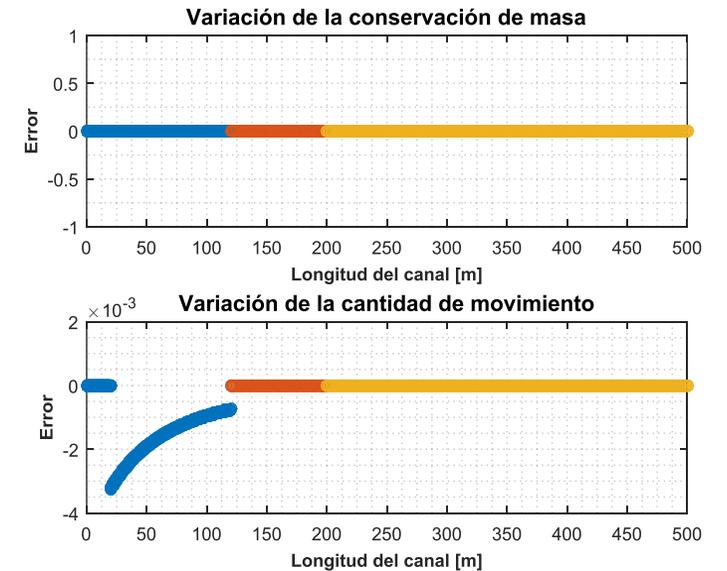
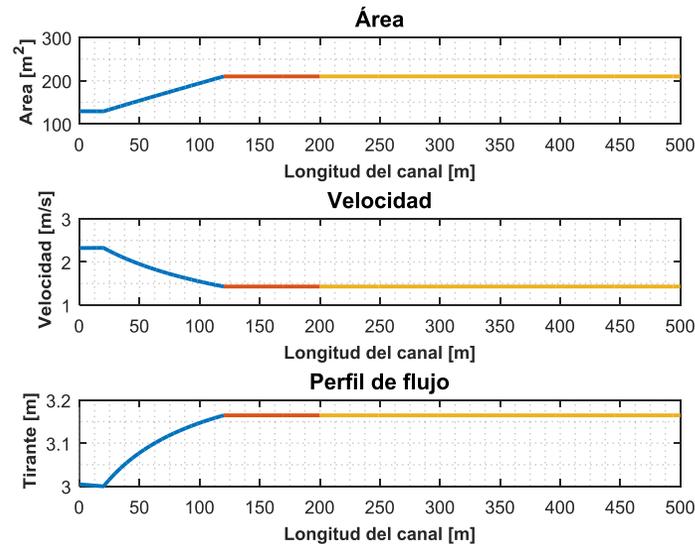
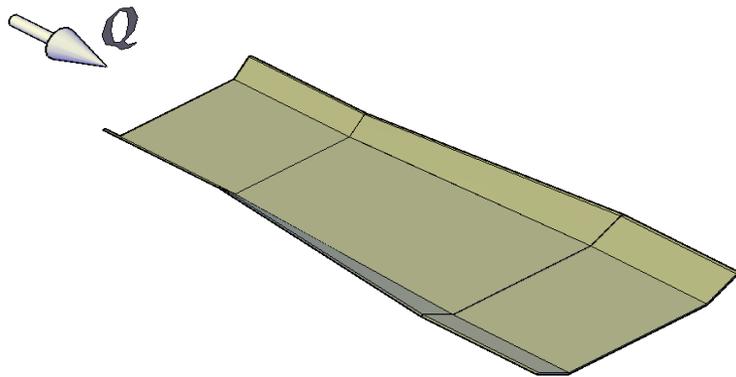
Parámetros generales en las pruebas numéricas.

Parámetro	Unidades	Valor
Gasto	m^3/s	300
Pendiente del fondo del canal	<i>adim.</i>	0.0001
Coefficiente de rugosidad de Manning	<i>adim.</i>	0.014
Discretización espacial Δx en la zona de la transición	<i>m</i>	0.1
Discretización espacial Δx fuera de la zona de la transición	<i>m</i>	1.0

PRUEBA 1. AMPLIACIÓN SUAVE EN CONDUCCIÓN CON SECCIÓN TRAPEZOIDAL

Descripción de la prueba:

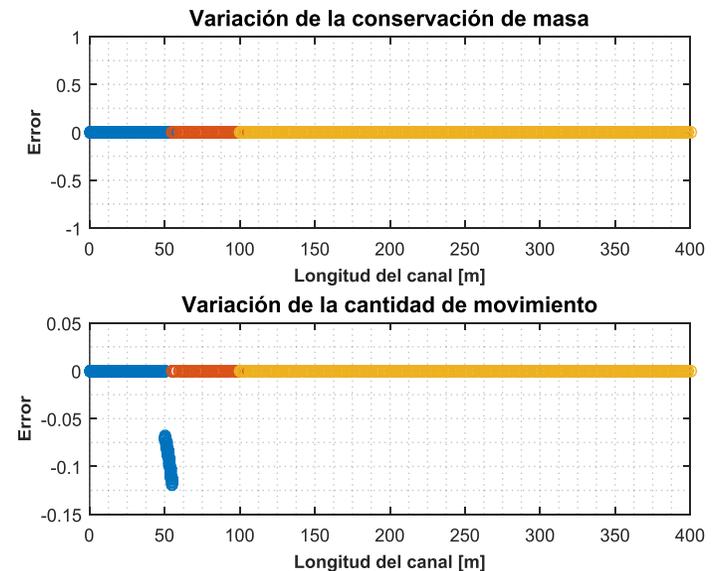
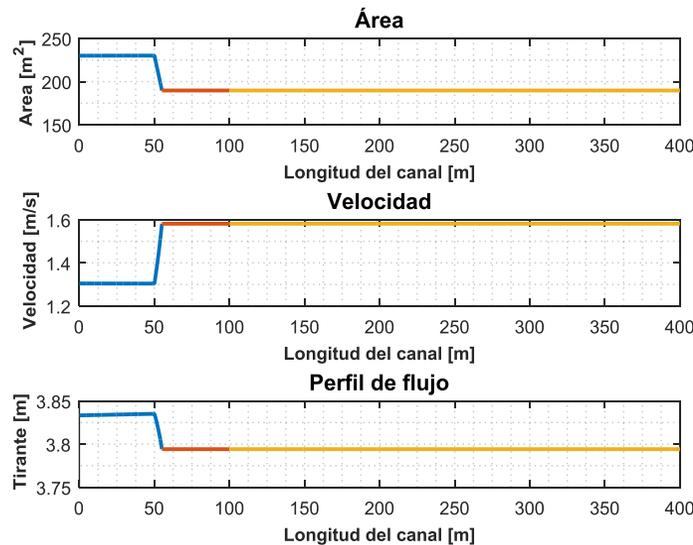
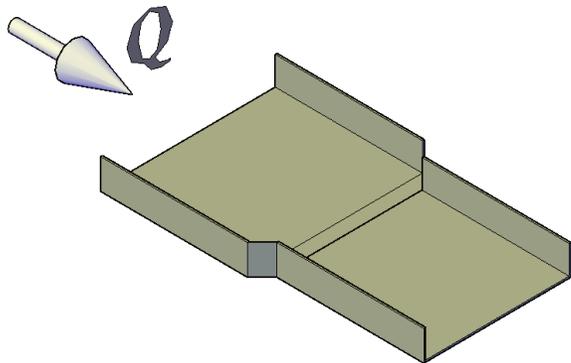
Canal con sección trapezoidal con una ampliación suave de la sección transversal, con una longitud total de la conducción de 500 m y la longitud de la transición es de 100 m. Donde el ancho del fondo y el talud en la sección inicial de la transición es de 50 m y 1 respectivamente y en la sección final de 60 m y 2.



PRUEBA 2. REDUCCIÓN ABRUPTA EN CONDUCCIÓN CON SECCIÓN RECTANGULAR

Descripción de la prueba:

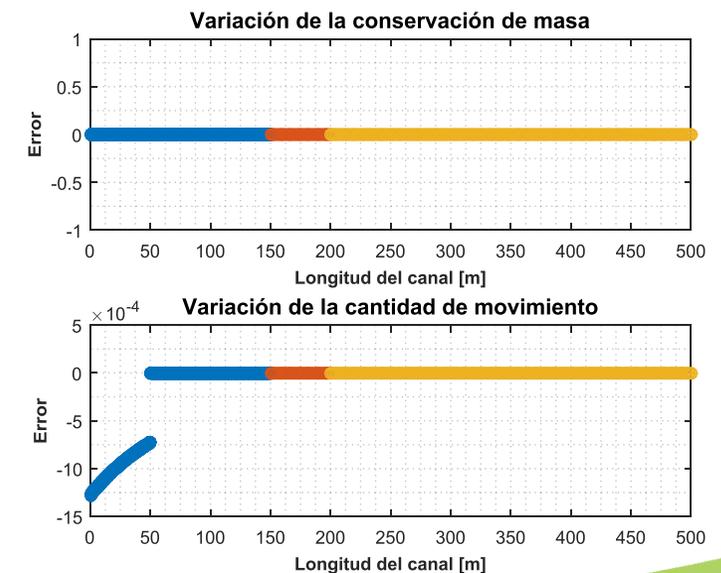
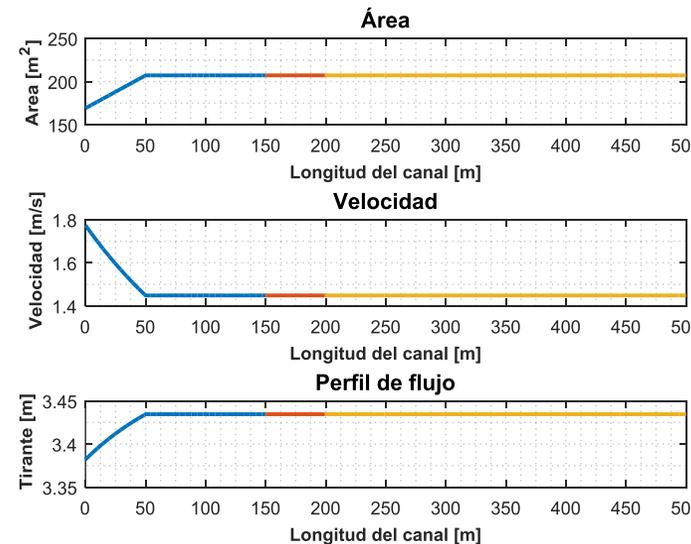
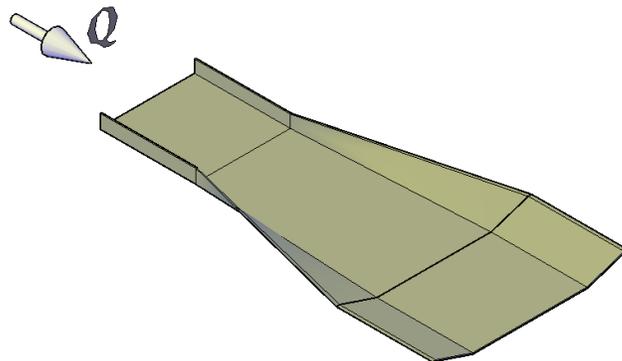
Canal con sección rectangular con una reducción abrupta de la sección transversal, con una longitud total de la conducción de 400 m y la longitud de la transición es de 5 m. Donde el ancho del fondo en la sección inicial y final de la transición es de 60 m y 50 m respectivamente.



PRUEBA 3. CAMBIO DE SECCIÓN DE RECTANGULAR A TRAPEZOIDAL

Descripción de la prueba:

Canal con sección rectangular al inicio y una trapezoidal al final de la transición, con una longitud total de la conducción de 500 m y la longitud de la transición es de 100 m. Donde el ancho del fondo y el talud en la sección inicial de la transición es de 50 m y 0 respectivamente y en la sección final de 50 m y 3.



CONCLUSIONES



Para el estudio del comportamiento del flujo en zonas de transiciones en conducciones a superficie libre, en este trabajo se construyó el modelo de condición inicial, obteniendo la ecuación dinámica de flujo gradualmente variado en zonas de transiciones a partir de las ecuaciones de Saint-Venant.

De acuerdo a los resultados que se obtuvieron se observa que al realizar la comprobación del perfil de flujo con la ecuación de cantidad de movimiento, el error es mayor cuando la transición de la conducción es abrupta y menor cuando se tiene una transición suave.



REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Abbott, M. (1979). *Computational Hydraulics. Elements of the Theory of Free Surface Flows*. Londres: PITMAN.

Burden, R., & Faires, J. (2002). *Análisis Numérico* (Septima ed.). Estados Unidos de América: Thomson Trad.

Chaudhry, M. (1986). *Applied Hydraulic Transients* (Segunda ed.). New York: Van Nostrand Reinhold Company.

Chow, V. T. (1959). *Open-Channel Hydraulics*. New York: Mc. Graw-Hill.

Cunge, J., Holly, F., & Verwey, A. (1980). *Practical Aspects of Computational River Hydraulics*. Londres: Pitman Publishing Limited.

Neuman, E. (2001). *Análisis Numérico de Integrales y Ecuaciones diferenciales* (Segunda ed.). Santa Fe, Argentina: Universidad Nacional del Litoral.

Sotelo Avila, G. (1997). *Apuntes de Hidráulica II*. México, D.F.: Facultad de Ingeniería, Universidad Nacional Autónoma de México.

W. Jeppson, R. (1974). *Simulation of Steady and Unsteady Flows in Channels and Rivers*. Utah: Utah State University.