



Artículo: COMEII-16031

**II CONGRESO NACIONAL
DE RIEGO Y DRENAJE COMEII 2016**
Chapingo, Edo. de México, del 08 al 10 de septiembre

**MODELACIÓN DE LA INFILTRACIÓN DEL RIEGO POR GRAVEDAD
UTILIZANDO LA ECUACIÓN DE RICHARDS EN 3D**

Juan Carlos Mota Escamilla¹

¹Facultad de Ingeniería. Universidad Autónoma de Querétaro. Cerro de las Campanas S/N. Col. Las Campanas. C.P. 76000. juan.mota.0@gmail.com

Resumen

Se presenta una metodología para solucionar la ecuación de Richards tridimensional sobre un dominio tipo surco. La solución es obtenida utilizando el gradiente conjugado no lineal. Para las derivadas espaciales se utiliza la matriz pseudoinversa definida por los puntos cercanos al punto que se quiere derivar. Los algoritmos propuestos -desde la discretización espacial hasta la resolución de la ecuación de Richards- se implementaron en un software al que hemos llamado ProCalnfi3D.

Palabras clave: Richards tridimensional, diferencias finitas, riego por surcos.



Introducción

Para describir el riego por gravedad se hace uso de ecuaciones que simulen el proceso de infiltración en un medio poroso, además de otros procesos, algunos de los cuales son: el transporte superficial de agua, la evaporación, etc.

El proceso de infiltración de agua, como es natural, ocurre en el espacio 3D. Sin embargo, cuando la geometría y las condiciones de frontera son invariantes sobre dos ejes coordenados, la infiltración se puede ver como un proceso que ocurre en un espacio unidimensional. De manera análoga, si la geometría y las condiciones de frontera son invariantes sobre un eje coordenado, entonces la infiltración puede modelarse como si fuera un proceso bidimensional.

El proceso de infiltración es modelado utilizando las soluciones analíticas o numéricas de la ecuación de Richards (1931). Las soluciones analíticas se establecen bajo condiciones de isotropía y homogeneidad de los medios, por lo que su aplicabilidad es limitada, sin embargo, los métodos numéricos permiten incorporar la anisotropía y heterogeneidad en el medio y con esto, los fenómenos de riego y drenaje están mejor representados.

La ecuación que representa el movimiento del agua en un suelo no saturado:

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} = \nabla \cdot (K(\Psi) \cdot \nabla \Psi) - \frac{\partial K}{\partial z} - \Upsilon \quad (1)$$

la cual es obtenida mediante la combinación del principio de continuidad (2) y la ley de Darcy (3).

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} = \nabla \cdot q + \Upsilon \quad (2)$$

$$q = -K(\Psi) \nabla H \quad H = \Psi - z \quad (3)$$

donde θ es el contenido de humedad; q es el caudal de agua por unidad de superficie en el suelo; t es el tiempo; H es el potencial hidráulico; Ψ es la presión; z es la profundidad; K es la conductividad hidráulica y Υ es un término de fuente.

La ecuación (1) tiene dos variables dependientes, el contenido de humedad (θ) y la presión (Ψ), sin embargo, en el proceso de infiltración, estas dos variables están relacionadas a través de la curva de retención $\theta(\Psi)$. Definiendo la capacidad específica como la derivada de la curva de retención:

$$C(\Psi) = \frac{\partial \theta}{\partial \Psi} \quad (4)$$

lo cual implica:



$$\frac{\partial \theta}{\partial t} = C(\Psi) \frac{\partial \Psi}{\partial t} \quad (5)$$

Usando la capacidad específica, la ecuación (1) queda expresada en términos de una variable (Ψ):

$$C(\Psi) \frac{\partial \Psi}{\partial t} = \nabla(K(\Psi) \cdot \nabla \Psi) - \frac{\partial K}{\partial z} - \Upsilon \quad (6)$$

La ecuación de Richards (6), expandiendo los operadores gradiente adquiere la forma:

$$C(\Psi) \frac{\partial \Psi}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left(K(\Psi) \frac{\partial \Psi}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(K(\Psi) \frac{\partial \Psi}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(K(\Psi) \frac{\partial \Psi}{\partial z} \right) - \frac{\partial K(\Psi)}{\partial z} \quad (7)$$

donde x e y son variables espaciales horizontales y z es la profundidad.

Para resolver esta ecuación es necesario proporcionar las características hidrodinámicas del suelo: la curva de retención de humedad y la curva de conductividad hidráulica. Una de las funciones más utilizadas para representar a la curva de retención de humedad es la ecuación de van Genuchten (1980):

$$\theta(\Psi) = \theta_r + \frac{\theta_s - \theta_r}{\left(1 + \left(\frac{\Psi}{\Psi_d} \right)^n \right)^m} \quad (8)$$

donde θ_s es el contenido de humedad a saturación, generalmente asimilada a la porosidad total del suelo (ϕ); θ_r es el contenido de humedad residual; Ψ es la presión; Ψ_d es un valor característico de la presión y m, n son parámetros de forma, adimensionales y positivos.

Una ecuación para representar la curva de conductividad hidráulica es la ecuación de Brooks y Corey (1964):

$$K(\theta) = K_s \left(\frac{\theta - \theta_r}{\theta_s - \theta_r} \right)^\eta \quad (9)$$

donde K_s es la conductividad hidráulica saturada y η es un parámetro de forma.

Los parámetros m y n pueden ser relacionados a partir de la restricción propuesta por van Genuchten (1980) al modelo de la conductividad hidráulica de Burdine (1953):

$$m = 1 - \frac{2}{n} \quad (10)$$

Existen algunos trabajos en la literatura que estudian la ecuación de Richards en dos dimensiones: Zavala *et al.* (2005) estudiaron el drenaje agrícola subterráneo para lo cual utilizaron la ecuación de Richards bidimensional (2-D). Saucedo *et al.* (2011) acoplaron la ecuación de Barré de Saint Venant unidimensional con la ecuación de Richards 2-D para modelar el riego por melgas. López *et al.* (1997) analizaron la infiltración de agua en un dominio tipo surco utilizando la ecuación de Richards 2-D.

En este trabajo se resuelve la ecuación de Richards 3D usando el esquema explícito en la zona no saturada y esquema implícito en la zona saturada. El esquema implícito se resuelve utilizando el gradiente conjugado para problemas no lineales.

Materiales y métodos

Dominio espacial.

El dominio espacial para resolver la ecuación de Richards tridimensional es creado a partir de un dominio bidimensional. El dominio en dos dimensiones es creado siguiendo los siguientes pasos: 1) Selección y discretización las fronteras del dominio; notar que existen dos tipos de fronteras: Fronteras exteriores, donde los puntos de interés están en el interior y las Fronteras interiores, donde los puntos de interés están en el exterior; 2) Relleno de las regiones interiores con puntos aleatorios distribuidos uniformemente y 3) Triangulación usando el algoritmo de Delaunay (1934). Una vez que se tiene el dominio espacial bidimensional, el dominio tridimensional se obtiene extendiendo el dominio 2D a lo largo del eje Y.

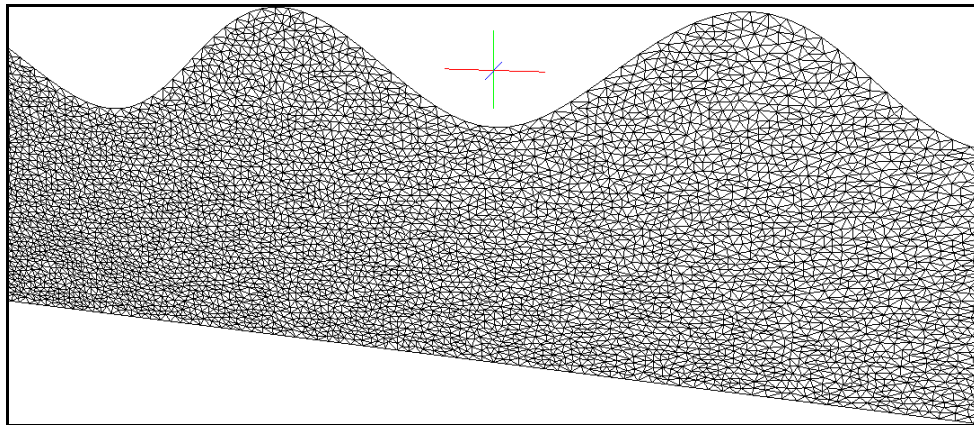


Figura 1. Discretización 2D de un dominio tipo surco. Notar que el plano está proyectado desde tres dimensiones.

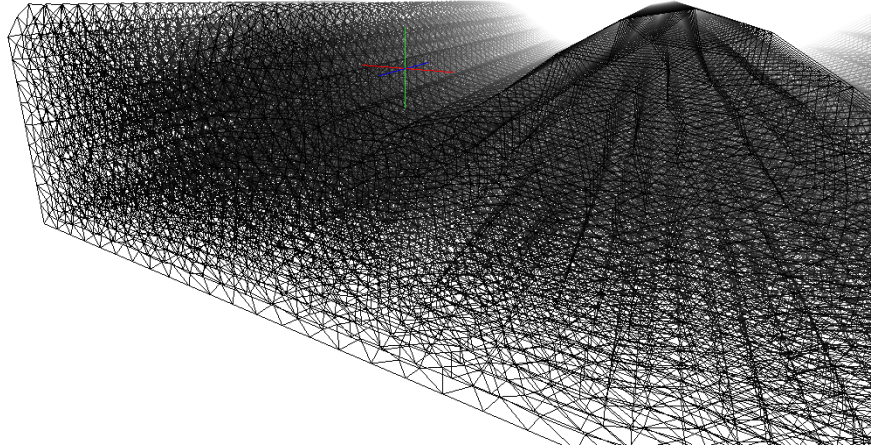


Figura 2. Discretización 3D de un dominio tipo surco obtenido a partir de su discretización 2D.

Solución en Diferencias finitas para la ecuación de Richards 3D.

La ecuación (7) evaluada en algún punto t_k en el tiempo se escribe de la siguiente forma:

$$c(\Psi(t_k)) \frac{\partial \Psi(t_k)}{\partial t_k} = \frac{\partial}{\partial x} \left(K(\Psi(t_k)) \frac{\partial \Psi(t_k)}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(K(\Psi(t_k)) \frac{\partial \Psi(t_k)}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(K(\Psi(t_k)) \frac{\partial \Psi(t_k)}{\partial z} \right) - \frac{\partial K(\Psi(t_k))}{\partial z} \quad (11)$$

Obsérvese que $\Psi(t_k)$ son las presiones en todo el espacio. En particular, si se está trabajando con alguna discretización espacial, $\Psi(t_k)$ es un vector de presiones. La ecuación (7) con derivada temporal discreta adquiere las siguientes dos formas (además de otras, dependiendo del esquema y precisión elegidos):

$$c(\Psi(t_k)) \frac{\Psi(t_{k+1}) - \Psi(t_k)}{t_{k+1} - t_k} = \frac{\partial}{\partial x} \left(K(\Psi(t_k)) \frac{\partial \Psi(t_k)}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(K(\Psi(t_k)) \frac{\partial \Psi(t_k)}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(K(\Psi(t_k)) \frac{\partial \Psi(t_k)}{\partial z} \right) - \frac{\partial K(\Psi(t_k))}{\partial z} \quad (12)$$

$$c(\Psi(t_k)) \frac{\Psi(t_k) - \Psi(t_{k-1})}{t_k - t_{k-1}} = \frac{\partial}{\partial x} \left(K(\Psi(t_k)) \frac{\partial \Psi(t_k)}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(K(\Psi(t_k)) \frac{\partial \Psi(t_k)}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(K(\Psi(t_k)) \frac{\partial \Psi(t_k)}{\partial z} \right) - \frac{\partial K(\Psi(t_k))}{\partial z} \quad (13)$$

La ecuación (12) corresponde al modelo explícito y la ecuación (13) corresponde al modelo implícito.

Definiendo el siguiente operador:

$$Op(\Psi(t_k)) = \frac{\partial}{\partial x} \left(K(\Psi(t_k)) \frac{\partial \Psi(t_k)}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(K(\Psi(t_k)) \frac{\partial \Psi(t_k)}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(K(\Psi(t_k)) \frac{\partial \Psi(t_k)}{\partial z} \right) - \frac{\partial K(\Psi(t_k))}{\partial z} \quad (14)$$

las ecuaciones (12) y (13) toman una forma más simple:

$$c(\Psi(t_k)) \frac{\Psi(t_{k+1}) - \Psi(t_k)}{t_{k+1} - t_k} = Op(\Psi(t_k)) \quad (15)$$



$$C(\Psi(t_k)) \frac{\Psi(t_k) - \Psi(t_{k-1})}{t_k - t_{k-1}} = Op(\Psi(t_k)) \quad (16)$$

Cuando $C(\Psi(t_k)) \neq 0$ la solución que se obtiene es una solución recursiva:

$$\Psi(t_{k+1}) = \frac{t_{k+1} - t_k}{C(\Psi(t_k))} Op(\Psi(t_k)) + \Psi(t_k) \quad (17)$$

Sin embargo, en la zona saturada $C(\Psi(t_k)) = 0$, por lo que en esos puntos no puede aplicarse la ecuación (17). Para estos casos hay que optimizar la ecuación (16), y el algoritmo que se utiliza en este trabajo es el del gradiente conjugado para problemas no lineales también llamado "gradiente conjugado no lineal". El método requiere que se defina una función a minimizar (función de error), en este caso requerimos que se cumpla la ecuación (16) por lo que naturalmente una función de error es la siguiente:

$$E(\Psi(t_k)) = \left\| C(\Psi(t_k)) \frac{\Psi(t_k) - \Psi(t_{k-1})}{t_k - t_{k-1}} - Op(\Psi(t_k)) \right\| \quad (18)$$

Cuando se está resolviendo por el método implícito en toda profundidad, (19) es la ecuación a optimizar.

Resultados

Simulación de la infiltración en un surco en 3D

Tomando las características hidrodinámicas del suelo Montecillo se procedió a realizar una simulación de la infiltración en un surco. Para lo anterior, los valores utilizados fueron $\theta_r = 0.0000 \text{ cm}^3/\text{cm}^3$, $\theta_s = 0.4865 \text{ cm}^3/\text{cm}^3$, $K_s = 1.8400 \text{ cm/h}$, $\Psi_d = -45.9000 \text{ cm}$ y $m = 0.1258$. Cada surco tiene las siguientes dimensiones: 30 cm de profundidad 90 cm de ancho y 100 m de longitud. La longitud de cada lado del triángulo es en promedio 1.5 cm y la separación entre una malla y otra en la dirección de la longitud del surco es de 1 m.

Se aplicó una presión constante de 15 centímetros en el surco central que se va desplazando a lo largo del a una velocidad de 100 m/hr. Ver Figura 3.

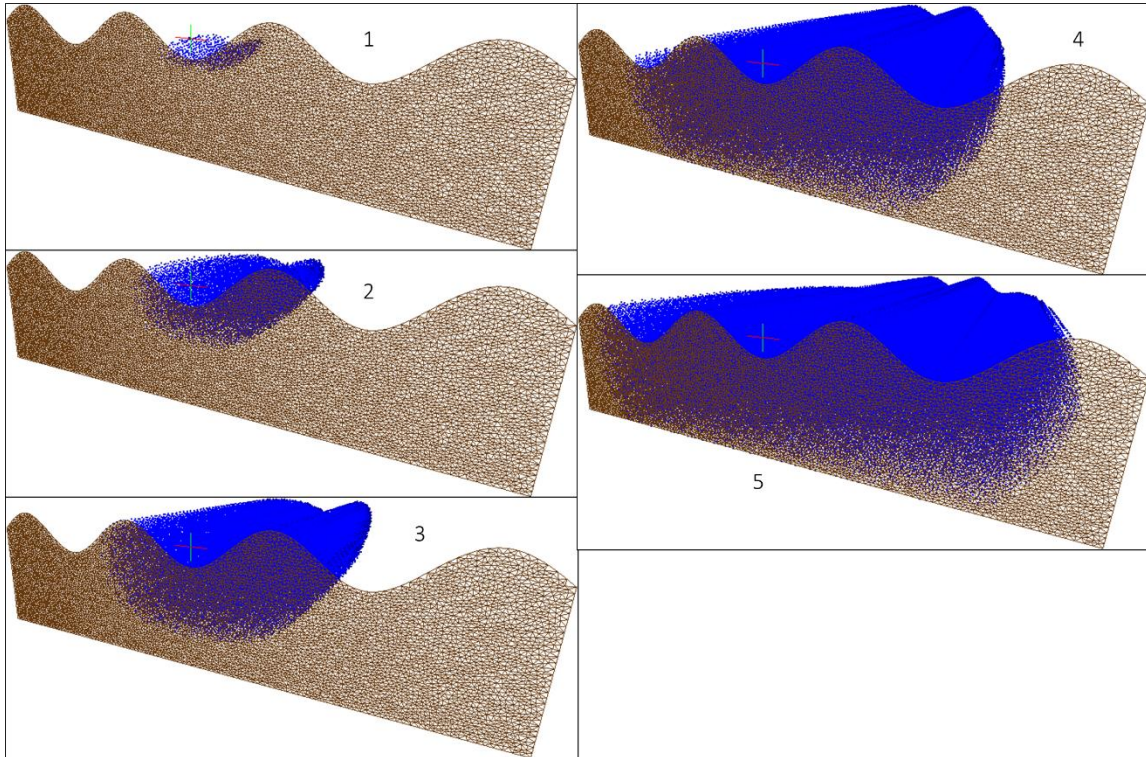


Figura 3. Vista de la infiltración en cinco tiempos diferentes: 0, 40, 80, 120, 160, 200 minutos de infiltración. La región en color azul corresponde a la zona donde el suelo tiene una concentración de agua mayor a $0.47 \text{ cm}^3/\text{cm}^3$.

Conclusiones

El fenómeno de infiltración en un dominio tridimensional puede ser modelado y resuelto mediante el método de diferencias finitas junto con el gradiente conjugado para problemas no lineales. Con los resultados obtenidos en cada simulación se puede observar la cantidad de agua que se va hacia capas profundas; así el tiempo en el que tarda en llegar una determinada concentración de agua a la parte superior del surco.

Referencias Bibliográficas

- Brooks, R. H., y Corey, A. T. 1964. Hydraulic properties of porous media and their relation to drainage design. Transactions of the ASAE, 7(1), 26-0028.
- Burdine, N. 1953. Relative permeability calculations from pore size distribution data. Journal of Petroleum Technology, 5(03), 71-78.
- Delaunay, B. 1934. Sur la sphere vide. Izv. Akad. Nauk SSSR, Otdelenie Matematicheskii i Estestvennyka Nauk, 7(793-800), 1-2.



López Avendano, J. E., Palacios Vélez, O. L., Fuentes Ruíz, C., Rendón Pimentel, L., y García Villanueva, N. H. 1997. Bidimensional analysis on infiltration in furrow irrigation. *Agrociencia* .

Richards, L. A. 1931. Capillary conduction of liquids through porous mediums. *Journal of Applied Physics*, 1(5), 318-333.

Saucedo, H., Zavala, M., y Fuentes, C. 2011. Modelo hidrodinámico completo para riego por melgas. *Tecnología y ciencias del agua*, 2(2), 23-38.

Van Genuchten, M. T. 1980. A closed-form equation for predicting the hydraulic conductivity of unsaturated soils. *Soil science society of America journal*, 44(5), 892-898.

Zavala Trejo, M., Fuentes Ruíz, C., y Saucedo Rojas, H. E. 2005. Radiación no lineal en la ecuación de Richards bidimensional aplicada al drenaje agrícola subterráneo. *Ingeniería hidráulica en México*, vol. XX, núm. 4, pp. 111-119.

Anexos

Anexo 1: Gradiente conjugado no lineal para Richards 3D.

Teniendo la función de error:

$$E(\Psi(t_k)) = \left\| C(\Psi(t_k)) \cdot \frac{\Psi(t_k) - \Psi(t_{k-1})}{t_k - t_{k-1}} - Op(\Psi(t_k)) \right\| \quad (19)$$

$$Op(\Psi(t_k)) = \frac{\partial}{\partial x} \left(K(\Psi(t_k)) \cdot \frac{\partial \Psi(t_k)}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(K(\Psi(t_k)) \cdot \frac{\partial \Psi(t_k)}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(K(\Psi(t_k)) \cdot \frac{\partial \Psi(t_k)}{\partial z} \right) - \frac{\partial K(\Psi(t_k))}{\partial z} \quad (20)$$

El gradiente conjugado no lineal para encontrar el mínimo consta de los siguientes pasos:

1. Se escoge $x_0 = \Psi(t_k)$
2. $\Delta x_0 = -\nabla_x E(x_0)$
3. $\alpha_0 = \arg \min (E(x_0 + \alpha \cdot \Delta x_0))$
4. $x_1 = x_0 + \alpha_0 \cdot \Delta x_0$
5. $s_0 = \Delta x_0$

Del paso 1 al paso 5 es la parte donde básicamente se inicia x_0 , los siguientes pasos (6 - 10) son iterativos y el algoritmo termina cuando $E(x_0)$ es pequeño.

6. $\Delta x_n = -\nabla_x E(x_n)$



7. $\beta = \frac{\Delta x_n^T \cdot \Delta x_n}{\Delta x_{n-1}^T \cdot \Delta x_{n-1}}$
8. $s_n = \Delta x_n + \beta \cdot s_{n-1}$
9. $\alpha_n = \arg \min (E(x_n + \alpha \cdot \Delta x_n))$
10. $x_{n+1} = x_n + \alpha_n \cdot s_n$

Por último, se escoge x_{n+1} como la solución a las presiones en el tiempo k .

Si se está resolviendo con el esquema mixto, la condición inicial para x_0 es $\Psi(t_k)$ en la zona no saturada y $\Psi(t_{k-1})$ en la zona saturada.

Anexo 2: Método para resolver el operador $Op(\Psi(t_k))$

Para simplificar la notación en el presente anexo, se hacen las siguientes definiciones:

1. Se define Ψ_i como la presión en el nodo i en cualquier tiempo.
2. La coordenada espacial del nodo i se define como $C_i = (x_i, y_i, z_i)$, donde x_i, y_i es la coordenada en la longitud y z_i en la profundidad.
3. $C_{i,j}$ es la coordenada espacial del j -ésimo nodo relacionado con el nodo i .
3.1. Naturalmente, $C_{i,j} = C_{i,j} = (x_{i,j}, y_{i,j}, z_{i,j})$
4. m_j es la cantidad de nodos relacionados con el nodo i .
5. P_i es la terna $(x_i, y_i, z_i, \Psi_i) = (C_i, \Psi_i)$.

Utilizando derivación de orden uno, la derivada en C_i es estimada derivando el plano $a \cdot x + b \cdot y + c \cdot z + d$ que mejor ajusta a los puntos $\{P_i, P_{1,i}, P_{2,i}, \dots, P_{m,i}\}$. Una forma de aproximar dicho plano es utilizar la matriz pseudoinversa definida por $C_{j,i}$ y resolviendo para a, b y c:

- Los puntos $\{P_i, P_{1,i}, P_{2,i}, \dots, P_{m,i}\}$ satisfacen $a \cdot x + b \cdot y + c \cdot z + d$, por lo que $a \cdot x_i + b \cdot y_i + c \cdot z_i + d = \Psi_i$ y $a \cdot x_{i,j} + b \cdot y_{i,j} + c \cdot z_{i,j} + d = \Psi_{i,j}$

- Las ecuaciones anteriores definen el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{aligned}
 a \cdot x_i + b \cdot z_i + c &= \Psi_i \\
 a \cdot x_{i,1} + b \cdot z_{i,1} + c &= \Psi_{i,1} \\
 &\vdots \\
 a \cdot x_{i,m_i} + b \cdot z_{i,m_i} + c &= \Psi_{i,m_i}
 \end{aligned} \tag{21}$$

- Reescribiendo el sistema (21):

$$A \cdot \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_i & z_i & 1 \\ x_{i,1} & z_{i,1} & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ x_{i,m_i} & z_{i,m_i} & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Psi_i \\ \Psi_{i,1} \\ \vdots \\ \Psi_{i,m_i} \end{pmatrix} \quad (22)$$

- La matriz A no necesariamente es invertible, por lo que es posible que el sistema no tenga solución exacta, sin embargo, todo sistema se puede optimizar:

$$\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = A^+ \cdot \begin{pmatrix} \Psi_i \\ \Psi_{i,1} \\ \vdots \\ \Psi_{i,m_i} \end{pmatrix} \quad (23)$$

- Donde A^+ es la matriz pseudoinversa de A .

Con los valores a , b y c obtenidos, es posible derivar hacia cualquier dirección, en particular, hacia x y z .

De manera similar a la aproximación lineal, utilizando derivación de orden dos, la derivada en C_i es estimada derivando la superficie

$a \cdot x^2 + b \cdot x \cdot y + c \cdot y^2 + d \cdot x + e \cdot y + f$ que mejor ajusta a los puntos $\{P_i, P_{1,i}, P_{2,i}, \dots, P_{m,i}\}$

. Una forma de aproximar dicha superficie es utilizar la matriz pseudoinversa definida por $C_{j,i}$ y resolviendo para a , b , c , d , e , y f :

- Los puntos $\{P_i, P_{1,i}, P_{2,i}, \dots, P_{m,i}\}$ satisfacen $a \cdot x^2 + b \cdot x \cdot y + c \cdot y^2 + d \cdot x + e \cdot y + f$, por lo que también satisfacen $a \cdot x_i^2 + b \cdot x_i \cdot y_i + c \cdot y_i^2 + d \cdot x_i + e \cdot y_i + f = \Psi_i$ y $a \cdot x_{i,j}^2 + b \cdot x_{i,j} \cdot y_{i,j} + c \cdot y_{i,j}^2 + d \cdot x_{i,j} + e \cdot y_{i,j} + f = \Psi_{i,j}$
- Las ecuaciones anteriores definen el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{aligned} a \cdot x_i^2 + b \cdot x_i \cdot y_i + c \cdot y_i^2 + d \cdot x_i + e \cdot y_i + f &= \Psi_i \\ a \cdot x_{i,1}^2 + b \cdot x_{i,1} \cdot y_{i,1} + c \cdot y_{i,1}^2 + d \cdot x_{i,1} + e \cdot y_{i,1} + f &= \Psi_{i,1} \\ &\vdots \\ a \cdot x_{i,m_i}^2 + b \cdot x_{i,m_i} \cdot y_{i,m_i} + c \cdot y_{i,m_i}^2 + d \cdot x_{i,m_i} + e \cdot y_{i,m_i} + f &= \Psi_{i,m_i} \end{aligned} \quad (24)$$

- Reescribiendo el sistema (24):

$$A \cdot \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_i & z_i & 1 \\ x_{i,1} & z_{i,1} & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ x_{i,m_i} & z_{i,m_i} & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Psi_i \\ \Psi_{i,1} \\ \vdots \\ \Psi_{i,m_i} \end{pmatrix} \quad (25)$$

- La matriz A no necesariamente es invertible, por lo que es posible que el sistema no tenga solución exacta, sin embargo, todo sistema se puede optimizar:



$$\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \\ e \\ f \end{pmatrix} = A^+ \cdot \begin{pmatrix} \Psi_i \\ \Psi_{i,1} \\ \vdots \\ \Psi_{i,m_i} \end{pmatrix} \quad (26)$$

- Donde A^+ es la matriz pseudoinversa de A .

Con los valores a , b , c , d , e y f obtenidos, es posible derivar hacia cualquier dirección, en particular, hacia x y z .