



Artículo: COMEII-16024

II CONGRESO NACIONAL DE RIEGO Y DRENAJE COMEII 2016

Chapingo, Edo. de México, del 08 al 10 de septiembre

MODELO DE CONDICIÓN INICIAL Y TRANSITORIO PARA ANALIZAR EL FLUJO EN CANALES CON BIFURCACIONES

Carlos Covarrubias Herrera^{1*}; Ariosto Aguilar Chávez²; Penélope Cruz Mayo³

¹ Posgrado en Ingeniería Civil/Hidráulica, UNAM, Campus Morelos IMTA, Paseo Cuauhnáhuac N. 3582, Jiutepec, Morelos, México, C.P. 62550. carlos_cova_her@outlook.com. (*Autor de correspondencia).

² Subcoordinador de Posgrado, Instituto Mexicano de Tecnología del Agua, Paseo Cuauhnáhuac N. 3582, Jiutepec, Morelos, México, C.P. 62550.

³ Posgrado en Ingeniería Civil/Hidráulica, UNAM, Campus Morelos IMTA, Paseo Cuauhnáhuac N. 3582, Jiutepec, Morelos, México, C.P. 62550.

Resumen

La red de canales en un distrito de riego tiene como función distribuir el agua desde la fuente de suministro hacia la zona regable, en la cual el flujo presenta perturbaciones por estructuras como obras de toma y derivaciones. El presente artículo estudia a detalle la influencia de las tomas laterales en la distribución de gastos en un canal principal de acuerdo con las ecuaciones de Saint Venant (S-V), las cuales describen el comportamiento del flujo permanente y no permanente, a partir de los principios de conservación de masa y cantidad de movimiento. Se codificó el modelo numérico en MATLAB[®] que calcula la condición inicial del flujo espacialmente variado con el método de Runge-Kutta de cuarto orden en la solución del flujo transitorio se consideraron las ecuaciones conservativas de S-V, discretas en diferencias finitas bajo el esquema de Preissmann. Dada la no linealidad las ecuaciones S-V, en algunos de sus términos, se aplicó el método de Newton-Raphson. Las pruebas numéricas se realizaron al considerar derivaciones en un tramo, esto complementando el Simulador de Múltiples Tramos (SMT). Los resultados obtenidos en las simulaciones numéricas fueron convergentes, logrando en este trabajo construir un algoritmo para evaluar flujo espacialmente variado en una conducción y también con la forma de trabajar la ecuación de cantidad de movimiento discreta en la condición de flujo transitorio propuesta por Cunge y Holly.

Palabras clave adicionales: Saint Venant, bifurcaciones, flujo no permanente, espacialmente variado.

Introducción

En una zona regable, una vez conocida la demanda del agua de los cultivos es necesario entregar el volumen requerido mediante la red de canales y la operación de la red se realiza mediante un conjunto de técnicas que toman en cuenta la capacidad de almacenamiento, de conducción y la configuración topológica del canal (ubicación de los puntos de entrega y niveles de operación) (Litrico & Fromion, 2009).

Para evaluar la eficiencia de operación de un tramo o de toda la red de canales se tienen dos criterios: el primero en función del volumen enviado y recibido (condición de conservación de masa), el cual se mide con el indicador de eficiencia de conducción y el segundo en función del tiempo de llegada del flujo y la regularidad del caudal en cada tramo, esto se mide con un indicador de eficiencia de distribución. Lo anterior implica que se debe establecer un modelo hidrodinámico de operación continua de gastos en la red de distribución (Sánchez & Gracia, 1988).

En este de estudio se desarrolló un modelo unidimensional con salidas de flujo lateral en un canal. Para analizar lo anterior fue necesario establecer un modelo general de flujo a superficie libre en régimen permanente y transitorio, en donde se tomará en cuenta los efectos de entrada o salida de masa, en las ecuaciones constitutivas de masa y cantidad de movimiento. Los flujos laterales en la topología de un canal de riego representan los canales laterales o sub-laterales, las toma granja o la infiltración en el fondo o taludes del canal, un ejemplo de esta configuración se muestra en la Figura 1.



a)

b)

Figura 1. Ejemplos de bifurcación en el canal principal y un canal lateral en una red de riego. a) Y b) Distrito 014 Río Colorado Baja California.

El objetivo general es construir un modelo numérico que sea posible contabilizar en forma directa el flujo del canal principal y lo que se envía a cada toma lateral, elaborando un algoritmo para la solución de condición inicial, que es flujo



espacialmente variado en estado permanente y la condición transitoria como estado no permanente, ambos en una conducción de superficie libre con múltiples tramos. La calidad del modelo se verificó con varias simulaciones de flujo transitorio y diversas configuraciones topológicas de la conducción, en este trabajo se presenta una de las más significativas realizadas.

La justificación para construir este algoritmo es: mejorar los conocimientos en la solución del flujo espacialmente variado, específicamente para flujo no permanente, analizar los efectos inerciales en condición de gasto creciente y decreciente e incorporar este algoritmo al modelo numérico Simulador de Múltiples Tramos (SMT) para evaluar los transitorios en canales regulados con compuertas, (Cruz, 2015) y transiciones en canales (Pastrana, 2016).

Ecuaciones fundamentales de flujo en canales abiertos.

Los principios físicos del flujo en canales, se encuentran descritos por las ecuaciones conservativas de masa y cantidad de movimiento de Saint Venant (S - V) (Abbott, 1979), (Cunge & Holly, 1980).

$$\mathcal{L}(A, Q; x, t) = \frac{\partial A}{\partial t} + \frac{\partial Q}{\partial x} = q_{lat} , \quad (1)$$

$$\mathcal{M}(A, Q; x, t) = \frac{\partial Q}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{Q^2}{A} \right) + gA \frac{\partial h}{\partial x} + gAS_f - q_{lat} U_x \cos \delta - \frac{Q}{A} q_{lat} = 0, \quad (2)$$

donde x es la coordenada en sentido horizontal, y t el tiempo como variables independientes; A el área hidráulica y Q gasto son las variables dependientes; q_{lat} es el gasto unitario o lateral, $U_x \cos \delta$ la componente en sentido (x) de velocidad del canal lateral; $h(A; x, t) = y(A; x, t) + Z_b(x)$ la elevación de la superficie del agua medida desde el nivel de referencia, $y(A; x, t)$ elevación de la superficie del agua medida desde la plantilla del canal, $Z_b(x)$ elevación de la plantilla del fondo del canal desde un nivel de referencia; S_b pendiente de fondo del canal, y S_f la pendiente de fricción se evalúa como:

$$S_f(A, Q; x, t) = \frac{n_m(x)^2 |Q| Q}{A^2 R(A; x, t)^{4/3}}, \quad (3)$$

donde n_m es coeficiente de rugosidad de Manning, y g la aceleración de la gravedad. Además Ω es el espacio solución, L es la longitud del canal, y T el tiempo final de cálculo.

El sistema de ecuaciones (1) y (2), representa un problema de valor inicial y de valores de frontera, bien planteado (Bertoluzza, Falleta, Russo, & Shu, 2009). La condición inicial de las ecuaciones de S - V se define como: $A(x, 0) = A_0(x)$ y $Q(x, 0) = Q_0(x)$. A su vez las condiciones de frontera para un transitorio en régimen subcrítico son: ($Fr > 1$), $A(0, t) = s(t)$ y $Q(0, t) = f(t)$ para $t > 0$.

Construcción de la condición inicial.

Para la condición inicial del problema de S - V ecuaciones (1) y (2) es:

$$f(x, y(x)) = \frac{S_b - S_f(x, y) - \frac{Q(x)}{A(y)^2 g} q_{lat}(x)}{1 - F_r(x, y)^2} \quad (4)$$

La expresión anterior es una ecuación diferencial ordinaria de disparo inicial no lineal y las condiciones de frontera, para flujo subcrítico son: $y(x = L) = y_f$ y $Q(x = 0) = Q_o$ y para flujo supercrítico: $y(x = 0) = y_f$ y $Q(x = 0) = Q_o$; donde y_f , es nivel del agua al final del canal y Q_o es el gasto de alimentación.

Las entradas laterales $q_{lat}(x)$ en el canal o más bien el flujo lateral que ingresa sobre el espacio longitudinal, se considera para el modelo diferencial con el siguiente criterio de evaluación que se muestra en la Figura 2

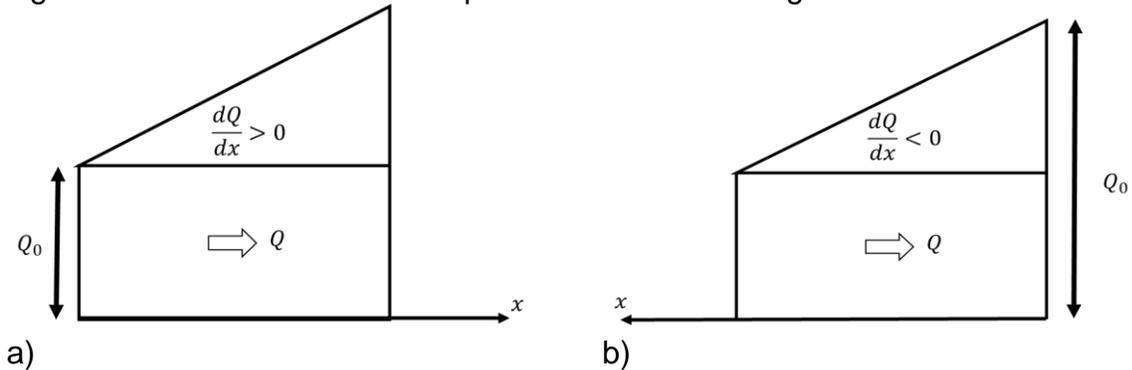


Figura 2. Característica del flujo lateral según el sentido de análisis. a) Sentido de cálculo para flujo supercrítico o condición formal. b) Sentido del cálculo para flujo subcrítico.

En la Gráfica 2 se muestra un perfil de flujo de la condición inicial de un canal con múltiples salidas, para obtener este resultado se aplicó el método de Runge-Kutta de cuatro orden (Burden & Faires, 2011). En este algoritmo se considera la discretización espacial como $\Delta x = L/J$, donde L , es la longitud del canal y J , el número de puntos de cálculo discretos, entonces se tiene un vector de posiciones $x = \{x_0, \dots, x_j, \dots, x_J\}$, de niveles $y = \{y_0, \dots, y_j, \dots, y_J\}$, gastos $Q = \{Q_0, \dots, Q_j, \dots, Q_J\}$ y gastos laterales $q_{lat} = \{q_{lat_0}, \dots, q_{lat_j}, \dots, q_{lat_J}\}$ obteniendo para cada sitio x_j un valor de nivel y_j , gasto $Q(x_j)$, área $A(y_j)$, y gasto lateral $q_{lat}(x_j)$. Los ejemplos de aplicación de este modelo discreto son representados gráficamente con valores de posición (x_j), y tirante (y_j).

Modelo discreto para la condición transitoria.

La condición transitoria es definida como un cambio de flujo entre dos estados permanentes, y en este evalúa las variaciones de gasto, área, velocidad y presiones en un canal con flujo lateral (Wylie & Streeter, 1978).

El sistema de ecuaciones (1) y (2), tienen una característica no lineal como se puede observar en el segundo, tercero y cuarto término de la ecuación de cantidad de movimiento, por lo cual para desarrollar una solución discreta de este modelo se propuso un modelo de aproximación de segundo orden conocido de Newton-Raphson.

Si las funciones que forman al sistema de $S - V$, $F(X)$ son continuas y diferenciables con respecto a X , que son las variables dependientes (Szymkeiwicz, 2010), con la cual es posible construir un modelo de convergencia no lineal, aplicando una expansión en serie de Frechet-Taylor (Milne, 1980), donde el valor de referencia es X^m y la variación de las variables dependientes es ΔX^m , entonces se tiene la siguiente función de estado:

$$F(X) = F(X^m + \Delta X^m), \quad (5)$$

Para evaluar la solución de referencia y sus cambios se propone aplica una expansión en serie de Frechet-Taylor, a continuación se muestra el modelo de aproximación de primer orden de esta expansión:

$$F(X^m) + \left. \frac{\partial F}{\partial X} \right|_{X^m} (X^{m+1} - X^m) = F(X^m) + J^m(X^m)(X^{m+1} - X^m) = 0, \quad (6)$$

donde $J^m(X^m)$ es la matriz Jacobiana del sistema de operadores diferenciales respecto a las variables dependientes, que contribuyen a reducir el tiempo de cálculo en las subsecuentes iteraciones (Szymkeiwicz, 2010), geoméricamente indican las pendientes de las variables dependientes en el plano y la trayectoria que guía hacia una solución más precisa en la iteración no lineal, entonces:

$$J^m = J^m(X^m) = \left[\begin{array}{cc} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A} & \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial Q} \\ \frac{\partial \mathcal{M}}{\partial A} & \frac{\partial \mathcal{M}}{\partial Q} \end{array} \right]_{X^m}. \quad (7)$$

Desarrollando la matriz Jacobiana sobre el sistema de ecuación y separando los términos no lineales, lo anterior solo se puede aplicar a la ecuación de cantidad movimiento ya que la ecuación de conservación de masa es lineal. Finalmente el modelo obtenido es:

$$\mathcal{M}(A, Q; x, t) = \frac{\partial Q}{\partial t} + \pi_1 \frac{\partial Q}{\partial x} + \pi_2 \frac{\partial A}{\partial x} + \pi_3 A + \pi_4 Q + \pi_5 \delta A + \pi_6 \delta Q = 0, \quad (8)$$

donde:

$$\pi_1 \equiv \frac{2Q}{A}, \quad (9)$$

$$\pi_2 \equiv gT - \frac{Q^2}{A^2}, \quad (10)$$

$$\pi_3 \equiv g(S_f - S_b), \quad (11)$$



$$\pi_4 \equiv -\frac{q_{lat}}{A}, \quad (12)$$

$$\pi_5 \equiv -\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{Q^2}{A^2} \right) + g \left(\frac{\partial y}{\partial x} + S_f - S_b + A \frac{\partial S_f}{\partial A} \right) + q_{lat} \frac{Q}{A^2}, \quad (13)$$

$$\pi_6 \equiv 2 \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{Q}{A} \right) + gA \frac{\partial S_f}{\partial Q} - \frac{q_{lat}}{A}. \quad (14)$$

Discretización tipo caja o de “Preissmann”.

Para resolver el sistema de ecuaciones continuas de S-V se aplicó el método de diferencias finitas, con la propuesta de un esquema de caja o de “Preissmann” (Abbott, 1979) (Cunge & Holly, 1980).

El modelo discreto considera $F_j^n = F(j\Delta x, n\Delta t)$ que se aproxima a la variable continua $F_j^n = \tilde{F}(j\Delta x, n\Delta t)$ en un punto (x_j, t_n) . Además, el espacio de solución $\Omega(x, t)$, es cubierto con una malla uniforme de espaciado $\Delta x = L/J$ para cualquier intervalo $\Delta t = T/N$; donde, J y N son números enteros e indican la cantidad de intervalos computacionales de discretización espacial y temporal respectivamente, de manera que $\Omega(x_j, t_n) = \Omega(j\Delta x, n\Delta t)$.

El esquema de discretización implícito considera un coeficiente de ponderación espacial θ y otro coeficiente de ponderación temporal ψ , como se muestra en la Figura 3. Entonces, las propuestas de discretización en diferencias finitas de Preissmann para la derivada espacial, temporal y términos independientes se describen a continuación:

derivadas temporales:

$$\frac{\partial f}{\partial t} = \frac{(1-\psi)}{\Delta t} (f_j^{n+1} - f_j^n) + \frac{\psi}{\Delta t} (f_{j+1}^{n+1} - f_{j+1}^n), \quad (15)$$

derivadas espaciales:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{(1-\theta)}{\Delta x} (f_{j+1}^n - f_j^n) + \frac{\theta}{\Delta x} (f_{j+1}^{n+1} - f_j^{n+1}), \quad (16)$$

términos adicionales:

$$f = (1-\theta)[(1-\psi)f_j^n + \psi f_{j+1}^n] + \theta[(1-\psi)f_j^{n+1} + \psi f_{j+1}^{n+1}] \quad (17)$$

$$\delta f = (1-\psi)\delta f_j^{n+1} + \psi\delta f_{j+1}^{n+1} \quad (18)$$

donde $\theta, \psi \in [0,1]$. En la se muestra la ubicación de los nodos de discretización centrado del modelo.

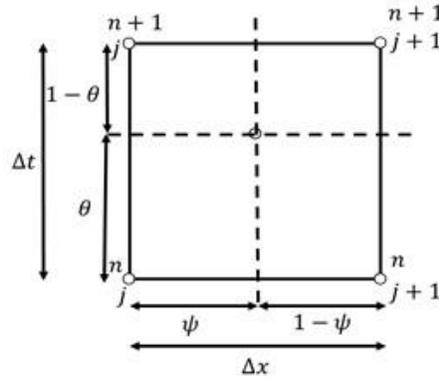


Figura 3. Representación de un esquema de Preissmann.

Condición de frontera”.

En este caso se define en la frontera aguas arriba una condición de variación de gasto en la entrada, por lo tanto, se hace pasar una avenida representada por un hidrograma $Q_j^{n+1} = Q(t)$ a lo largo del canal, lo que puede representar por ejemplo la apertura de compuertas de la obra de toma de una presa derivadora o una compuerta del canal lateral para comenzar la operación.

En el caso de la condición de frontera aguas abajo se consideran los siguientes criterios:

Tirante fijo, representa la descarga de un río hacia un gran embalse $y_j^{n+1} = y_f$; cambio del nivel en función de la variación en los puntos más cercanos a la frontera $\left(\frac{\partial h}{\partial x}\right)_{x=J\Delta x} = 0$ y en forma práctica se propone la siguiente relación $y_j^{n+1} = \frac{1}{4}(y_{j-3}^n + y_{j-2}^n + y_{j-1}^n + y_j^n)$. También se puede proponer una ley de descarga para evaluar el nivel en función del gasto que se descarga $y_j^{n+1} - f(Q_j^{n+1}) = 0$. En el modelo discreto se evalúa el área en la condición de frontera aguas abajo, por lo tanto, se tiene que $A_{j+1}^{n+1} - f(y_j^{n+1}) = 0$.

Finalmente para el modelo discreto de la condición transitoria se determina el siguiente sistema de ecuaciones de S – V.

$$a_1 Q_j^{n+1,m+1} + b_1 A_j^{n+1,m+1} + c_1 Q_{j+1}^{n+1,m+1} + d_1 A_{j+1}^{n+1,m+1} = e_{1j}^n, \quad (19)$$

$$a_2 Q_j^{n+1,m+1} + b_2 A_j^{n+1,m+1} + c_2 Q_{j+1}^{n+1,m+1} + d_2 A_{j+1}^{n+1,m+1} = e_{2j}^n. \quad (20)$$

Construyendo una ecuación matricial pentadiagonal representado como $A\mathbf{y}^{n+1,m+1} = \mathbf{y}^n$, y la solución para el intervalo $(n + 1)$ es $I\mathbf{y}^{n+1,m+1} = A^{-1}\mathbf{y}^n$, con lo cual se obtienen los nuevos valores del tirante en $(n + 1)$.

Los valores de Q^n y A^n se actualizan a Q^{n+1} y A^{n+1} , El error de convergencia sobre la iteración no lineal es la diferencia de los parámetros del gasto y área

iniciales con los actualizados ecuaciones (21) y (22). Estas variaciones guían la convergencia numérica sobre la iteración no lineal, y su evaluación final es la mostrada en la ecuación (23):

$$\delta A = A^{n+1,m+1} - A^{n+1,m} , \tag{21}$$

$$\delta Q = Q^{n+1,m+1} - Q^{n+1,m} , \tag{22}$$

$$\frac{\|A, Q^{n+1,m+1} - A, Q^{n+1,m}\|}{\|A, Q^{n+1,m}\|} \leq \varepsilon . \tag{23}$$

Programación del algoritmo.

Se utilizó la plataforma MATLAB®, software matemático que ofrece un entorno de desarrollo integrado con un lenguaje de programación propio.

La aplicación de este software consiste en la solución de las ecuaciones gobernantes en canales abiertos por medio de método numéricos ya establecidos en la literatura, en una manera más práctica como para el caso particular que se presenta en este trabajo cuyo objetivo es hacer una modelación numérica del flujo no permanente en bifurcaciones de canales, con la siguiente secuencia:



Figura 4. Secuencia General del algoritmo.

Análisis y discusión de resultados

Para verificar el funcionamiento y convergencia numérica del modelo discretos presentados en el capítulo anterior, se realizaron una serie de pruebas numéricas con una diversidad de tipos y configuraciones topológicas de cauce, el escenario estudiado se muestra a continuación.

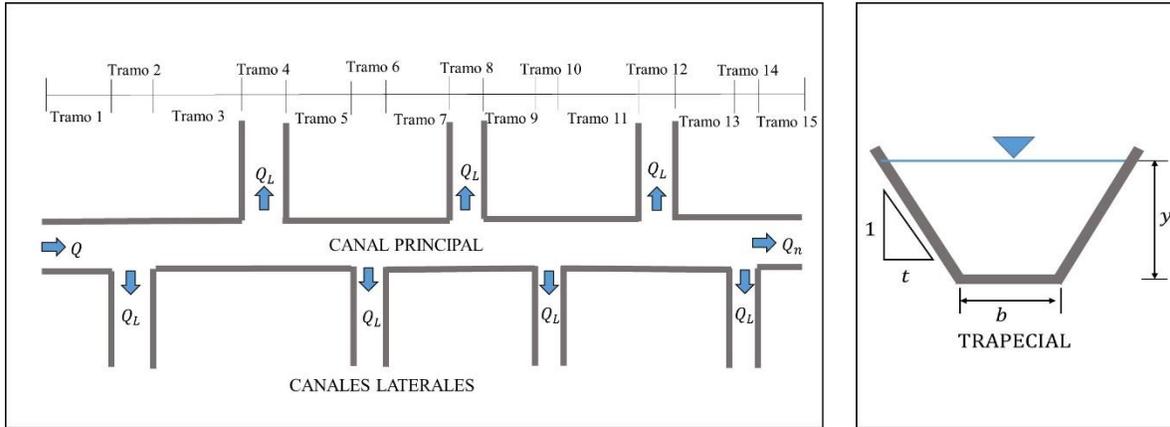
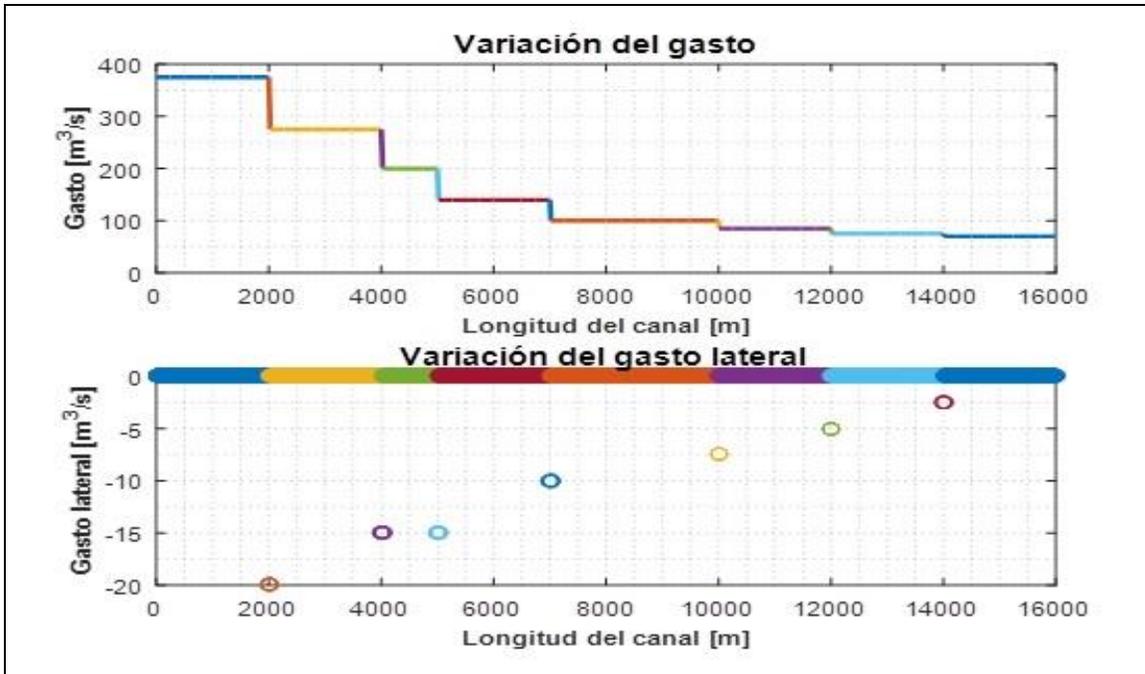
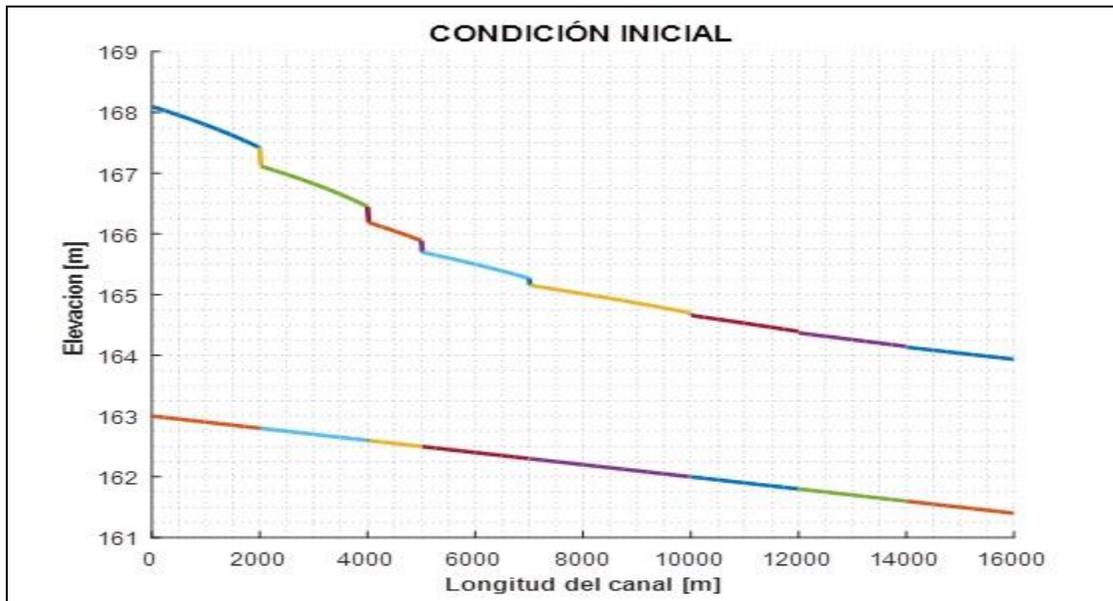


Tabla 1 Datos iniciales.

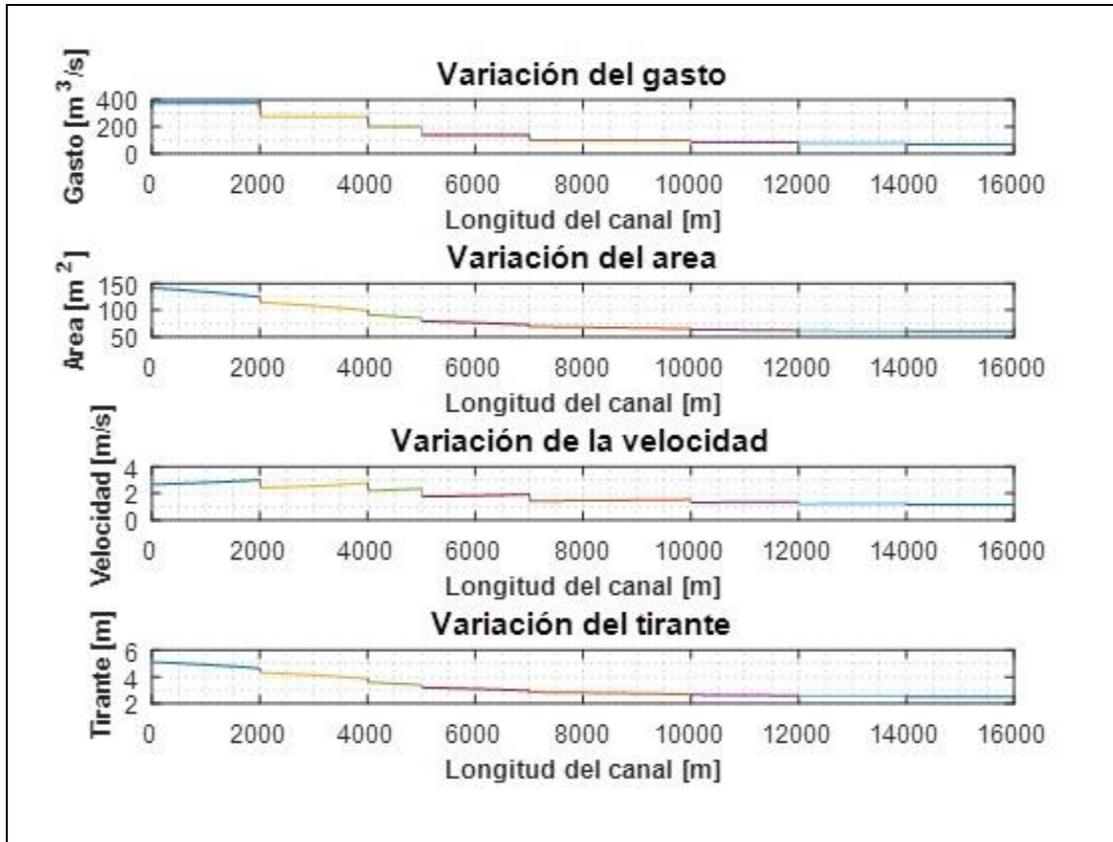
Concepto	Valor	Concepto	Valor
$Q_{inicial}(m^3/s)$	375	k	1.5
S_o	0.0001	$L(m)$	16000
$b(m)$	20	$\Delta x(m)$	5
$N. Bif.$	7	$b_{lat}(m)$	[25 25 20 20 10 10 10]
$q_{lat}(m^2/s)$	[-4 -3 -3 -2 -1.5 -1 -0.5]	$Q_L(m^3/s)$	[-100 -75 -60 -40 -15 -10 -5]



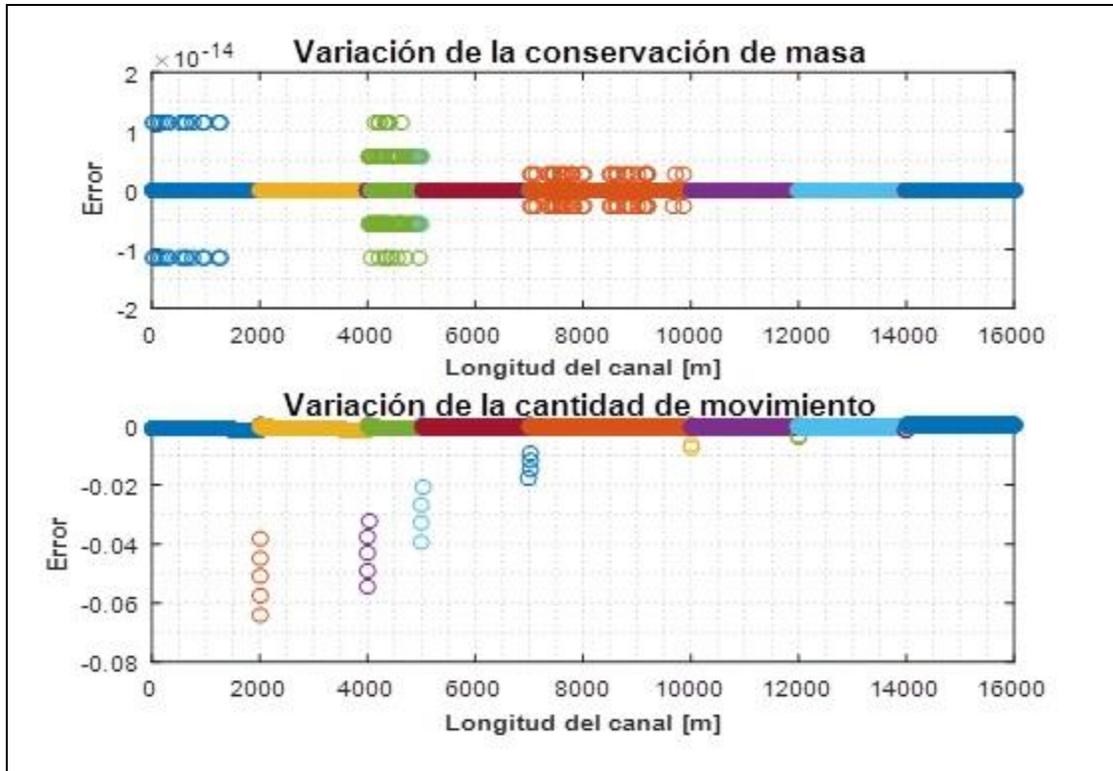
Gráfica 1. Variación de gasto a lo largo del canal.



Gráfica 2. Perfil calculado con el Método de Runge-Kutta de cuarto orden.



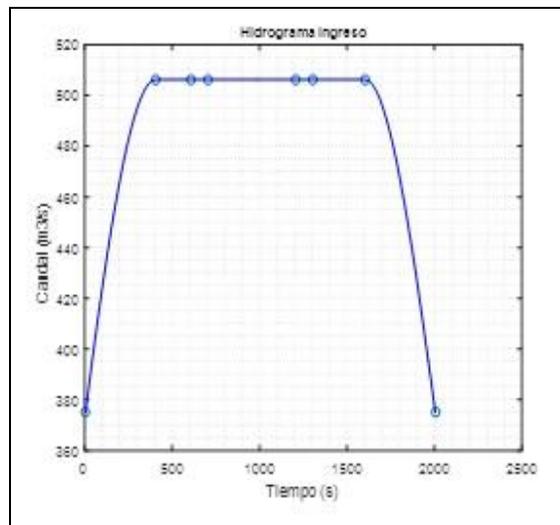
Gráfica 3. Variables iniciales calculados.

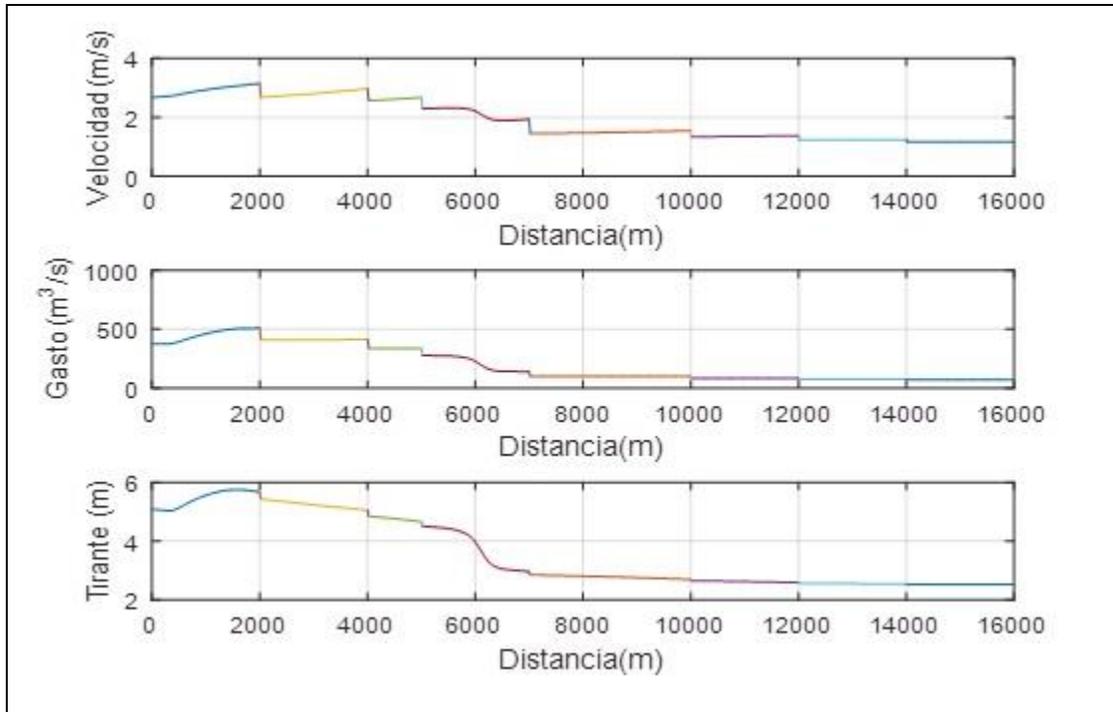


Gráfica 4. Comprobación de las ecuaciones de Saint Venant.

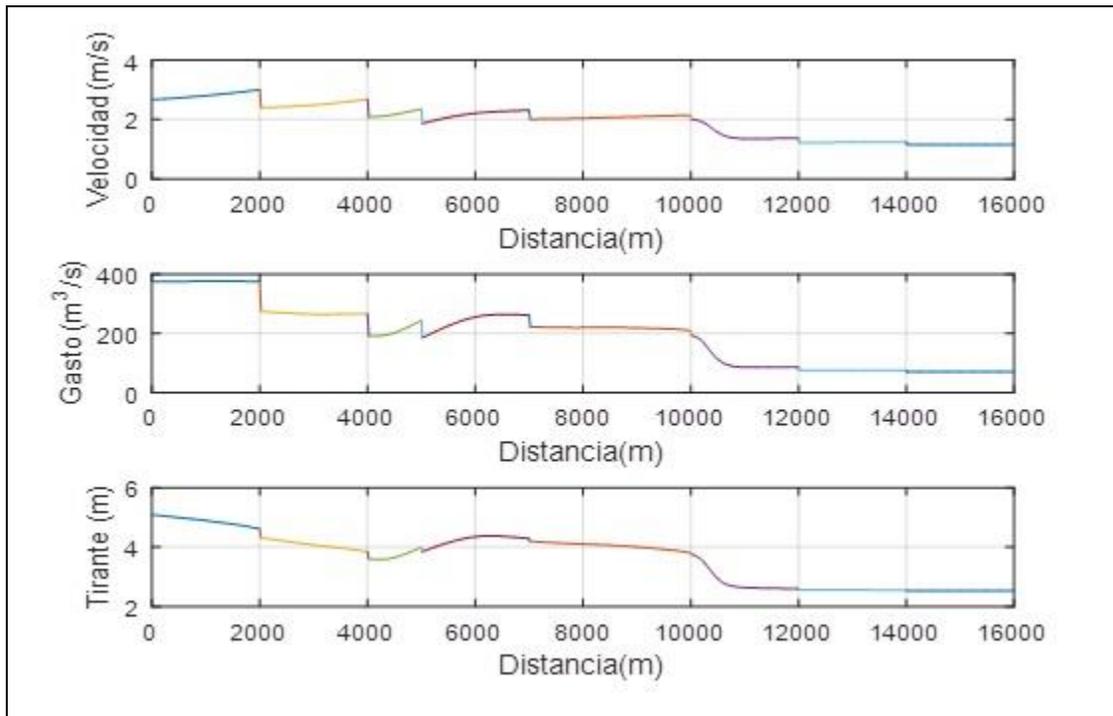
Tabla 2 Datos para la simulación transitoria.

Datos de la Simulación Transitoria			
Courant	30	ψ	0.5
Δt (s)	11.21	θ	0.6
Datos del Hidrograma.			
QBase(m^3/s)	375	Tiempo de despliegue (s)	50
QPico (m^3/s)	506.25	Tiempo de duración (s)	1800

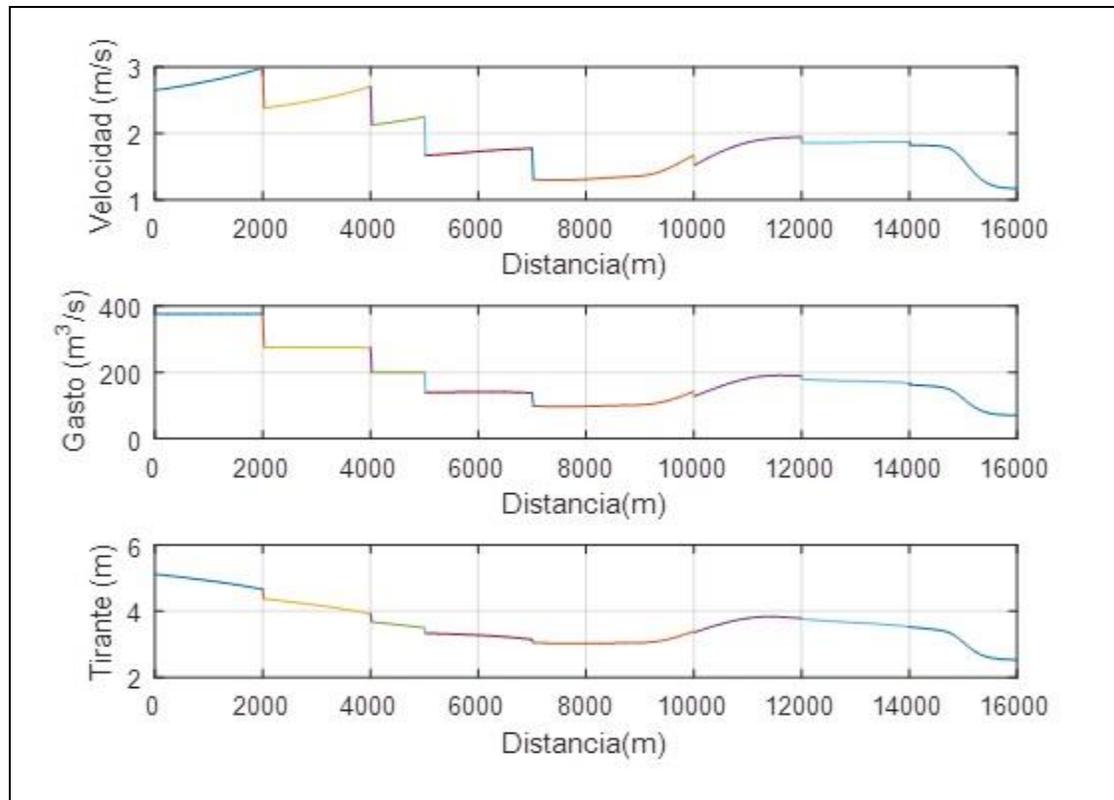




Gráfica 5. Tránsito de la avenida a lo largo del canal en 2185 s.



Gráfica 6. Tránsito de la avenida a lo largo del canal en 3274 s.



Gráfica 7. Tránsito de la avenida a lo largo del canal en 4641 s.

Conclusiones

El modelo discreto con iteración no lineal converge numéricamente de manera satisfactoria, tal como lo describe el análisis de convergencia aplicando el teorema de Lax (Morton & Mayers, 2005). Se comprobó que la discretización de Preissmann, de acuerdo a (Aldama A. & Aguilar C., 1996), (Chaudhry, 1979) & (Litrico & Fromion, 2009) es adecuada para la solución de las ecuaciones de Saint Venant incluso considerando adición o sustracción de flujo lateral. Los valores de los coeficientes de ponderación espacial y temporal del esquema de Preissmann es recomendable usar, $\theta = 0.6$ y $\psi = 0.5$, esto como resultado de diversas pruebas de análisis de estabilidad por (Aguilar Chávez, 2002).

Referencia bibliográfica

- Abbott, M. B. (1979). *Computational Hydraulics Elements of the Theory of Free Surface Flows*. PITMAN.
- Aguilar Chávez, A. (2002). Propiedades de propagación de esquemas numéricos para la simulación de flujos a superficie libre. Tesis Doctoral UNAM.
- Aldama A., & Aguilar C. (1996). Stability analysis of the Preissmann scheme. *Computational Methods in Water Resources*, 37-44.



- Bertoluzza, S., Falleta, S., Russo, G., & Shu, C.-W. (2009). *Numerical Solutions of Partial Differential Equations*. (M. Castellet, Ed.) Basel, Switzerland: BIRKHUASER.
- Burden, R. L., & Faires, J. D. (2011). *Análisis numérico* (Novena ed.). (S. R. Cervantes González, Ed., & P. Solorio Gómez, Trad.) Estados Unidos de América: CENGAGE Learning.
- Chaudhry, P. (1979). *Applied Hydraulic Transients*. New York: Van Nostrand Reinhold Springer.
- Chow, T. V. (2000). *Hidráulica de canales abiertos*. McGraw-Hill.
- Covarrubias, C. (2016). *Modelo numérico para analizar el flujo en bifurcaciones en canales*. Ciudad de México: Tesis de Maestría, Posgrado en Maestría y Doctorado en Ingeniería UNAM.
- Cruz, M. (2015). *Modelo Hidrodinámico de Canales de Riego con Compuertas de Regulación*. México D.F.: Tesis de Maestría, Posgrado de Maestría y Doctorado en Ingeniería UNAM.
- Cunge, J. A., & Holly, F. M. (1980). *Practical Aspects of Computational River Hydraulics*. London: Pitman Advanced Publishing.
- Litrico, X., & Fromion, V. (2009). *Modeling and Control of HydroSystems*. Springer.
- Losada, A. (1997). Glosario sobre sistemas de riego. 55-68.
- Milne, R. (1980). *Applied functional analysis, An introduction treatment*. Londres: Pitman Publishing Limited.
- Sánchez, J. L., & Gracia, J. (1988). *Desarrollo de un modelo matemático para simular la operación de un canal de riego*. Instituto de Ingeniería UNAM.
- Szymkeiwicz, P. K. (2010). *Numerical Modeling in Open Channel Hydraulics*. Springer Science & Business Media.
- US Army Corps of Engineers. (1993). *Hydraulic Engineering Center*. Recuperado el 29 de 04 de 2016, de <http://www.hec.usace.army.mi/software/hec-ras>
- Wylie, E. B., & Streeter, V. L. (1978). *Fluid Transients*. McGraw-Hill International Company.