Artículo: COMEII-16023

II CONGRESO NACIONAL
DE RIEGO Y DRENAJE COMEII 2016
Chapingo, Edo. de México, del 08 al 10 de septiembre

MODELO DE CONDICIÓN INICIAL DE FLUJO EN TRANSICIONES

Edwin Jonathan Pastrana[1*]; Ariosto Aguilar Chávez[2]; Penélope Cruz Mayo[3]

[1]Posgrado en Ingeniería Civil/Hidráulica-UNAM-Campus Morelos. Paseo Cuauhnáhuac No. 8532, Col. Progreso, Jiutepec, Morelos, México. C.P. 62550. jona_19_99@hotmail.com. (*Autor para correspondencia)

[2]Subcoordinador de Posgrado, Instituto Mexicano de Tecnología del Agua. Paseo Cuauhnáhuac No. 8532, Col. Progreso, Jiutepec, Morelos, México. C.P. 62550

[3]Posgrado en Ingeniería Civil/Hidráulica-UNAM-Campus Morelos. Paseo Cuauhnáhuac No. 8532, Col. Progreso, Jiutepec, Morelos, México. C.P. 62550

Resumen

El comportamiento del flujo a superficie libre en un cauce natural o artificial depende de las características geométricas de la sección transversal, la rugosidad y la pendiente del fondo del cauce. Cuando la sección transversal no es uniforme en el sentido espacial, el flujo presenta variaciones de tirante por este efecto. Estos cambios están en función de la forma en que se genera el cambio entre las secciones transversales, ya sea de forma suave o abrupta y es importante tomarlas en cuenta en el diseño o en análisis hidráulico. Las ecuaciones generales que describen el comportamiento del flujo unidimensional a superficie libre son las ecuaciones de Saint-Venant (Abbott, 1979) y para analizar los efectos de los cambios de sección en zonas de transición se utiliza la versión conservativa integrodiferencial (Cunge, Holly, & Verwey, 1980), debido a que este sistema de ecuaciones toma en cuenta la irregularidad de la conducción. En este trabajo se desarrolla el modelo de la condición inicial resolviendo la ecuación dinámica del flujo gradualmente variado para transiciones obtenida a partir de las ecuaciones de conservación de masa y cantidad de movimiento de Saint-Venant. Para verificar el funcionamiento del modelo se realizaron pruebas en conducciones con transiciones, por ejemplo: ampliaciones, reducciones y cambios en la forma geométrica de la sección transversal. Los resultados que se obtuvieron fue la variación del tirante, velocidad, conservación de masa y cantidad de movimiento a lo largo de la conducción.

Palabras clave adicionales: Saint-Venant, transición, flujo gradualmente variado.

Introducción

En el diseño hidráulico de canales a superficie libre, con frecuencia se requiere modificar la forma y las dimensiones de la sección transversal, o cambiar la dirección en planta o en la elevación de la plantilla del fondo del canal, con el fin de satisfacer requerimientos hidráulicos, topográficos o estructurales del trazo. Es por esto, que es de suma importancia conocer los valores que toman las variables hidráulicas, tales como: el tirante y la velocidad iniciales en todas las secciones del sistema.

En este artículo se muestra el análisis del sistema de ecuaciones de Saint-Venant en su versión conservativa integrodiferencial para obtener la ecuación dinámica de flujo gradualmente variado en conducciones donde existen cambios en la sección transversal, tales como: la transición entre una geometría y otro distinta o bien reducciones o ampliaciones en el mismo tipo de geometría. También estas transiciones pueden ser suaves o abruptas, según la longitud que tengan con respecto al ancho o profundidad de la conducción. Para evaluar el modelo se realizaron distintas pruebas en conducciones con secciones rectangulares y trapezoidales.

Materiales y métodos

Ecuaciones de Saint-Venant

Los problemas de flujo en canales abiertos pueden ser resueltos con las ecuaciones de conservación de masa y cantidad de movimiento que se derivan del principio de continuidad y de la segunda ley de Newton respectivamente.

Las ecuaciones generales que describen el comportamiento de flujos unidimensionales a superficie libre en cauces naturales o artificiales son conocidas como las ecuaciones de Saint-Venant, planteadas originalmente por Barré de Saint-Venant en 1871 (Cunge, Holly, & Verwey, 1980), en este trabajo se manejaran la versión conservativa integrodiferencial y se muestran a continuación:

Ecuación de conservación de masa

$$\mathcal{L}(A,Q;x,t) = \frac{\partial A}{\partial t} + \frac{\partial Q}{\partial x} = 0\,. \tag{1}$$

Ecuación de cantidad de movimiento

$$\mathcal{M}(A,Q;x,t) = \frac{\partial Q}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{Q^2}{A}\right) + g\frac{\partial I_1(A;x,t)}{\partial x} - gI_2(A;x,t) + gA\left[S_f(A,Q;x,t) - S_o\right] = 0\,, \tag{2}$$

Donde

$$I_1(A;x,t) = \int_0^{y(A;x,t)} [y(A;x,t) - \eta]\delta(x,\eta)\; d\eta\,, \tag{3}$$

$$I_2(A;x,t) = \int_0^{y(A;x,t)} [y(A;x,t) - \eta] \left.\frac{\partial \delta}{\partial x}\right|_{(x,\eta)} d\eta \,, \tag{4}$$

donde x es la coordenada en el sentido horizontal y t el tiempo como variables independientes; $A(x,t)$ el área hidráulica y $Q(x,t)$ el gasto como variables dependientes, además $A,Q{:}\Omega(x,t) = [0,L]x[0,T]$; donde Ω es el espacio de solución; L es la longitud de la conducción; T tiempo final de la solución; $I_1(A;x,t)$ el cambio de la presión hidrostática; $I_2(A;x,t)$ la presión ejercida sobre las paredes del canal; $y(A;x,t)$ el nivel de la superficie libre del agua medido a partir de la plantilla del fondo del canal; η es el nivel de flujo medido a partir de la plantilla del fondo del canal; $\delta(x,\eta)$ el ancho de superficie libre respecto a un nivel η (véase Figura 1); $\left.\frac{\partial \delta}{\partial x}\right|_{(x,\eta)}$ es la variación espacial de la superficie libre del agua respecto a un nivel η; g la aceleración de la gravedad; $S_o(x)$ la pendiente del fondo del canal y $S_f(A,Q;x,t)$ es la pendiente de fricción y se evaluara con la siguiente relación dimensionalmente no homogénea (Chow, 1959):

$$S_f(A,Q;x,t) = \frac{n^2|Q|Q}{A^2R^{4/3}} \,, \tag{5}$$

Siendo n el coeficiente de rugosidad de Manning; $R(A;x,t) = A(x,t)/P(A;x,t)$ el radio hidráulico, y $P(A;x,t)$ es el perímetro mojado de la sección.

Análisis de los términos integrodiferenciales para secciones prismáticas

En una conducción con ampliaciones o reducciones sin variaciones bruscas del fondo del canal para una sección prismática (véase Figura 1), se tiene que $\delta(x,\eta(x,t)) = B(x,t)$, donde $B(x,t)$ es el ancho de superficie libre del agua.

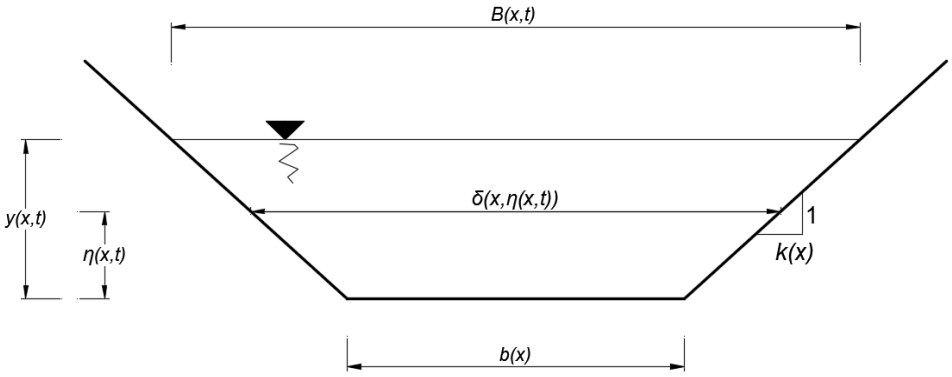


Figura 1. Características geométricas de un canal prismático con sección trapezoidal.

De acuerdo a la figura anterior la superficie libre del agua se evaluará como $B(x) = b(x) + 2k(x)y(x)$ y el área de la sección transversal es $A(y;x,t) = k(x)y(x)^2 + b(x)y(x)$, además,

$$\delta(x,t) = b + 2k\eta \,, \tag{6}$$

$$\left.\frac{\partial \delta}{\partial x}\right|_{(x,\eta)} = \frac{\partial b}{\partial x} + 2\frac{\partial k}{\partial x}\eta \,. \tag{7}$$

En la ecuación anterior el termino $\eta(x,t)$, está localizado para la evaluación del elemento diferencial, entonces $\frac{\partial \eta}{\partial x}$ es pequeño, mientras $\frac{\partial b}{\partial x}$ y $\frac{\partial k}{\partial x}$ son las variaciones del ancho y el talud a lo largo de la conducción. Considerando lo anterior, las integrales $I_1(A;x,t)$ y $I_2(A;x,t)$ para un canal prismático (ecuaciones (3) y (4) respectivamente), son:

$$I_1(x,t) = y^2(x,t)\left[\frac{b(x)}{2} + y(x,t)\frac{k(x)}{3}\right], \tag{8}$$

$$I_2(x,t) = y^2(x,t)\left[\frac{1}{2}\frac{\partial b}{\partial x} + \frac{y(x,t)}{3}\frac{\partial k}{\partial x}\right]. \tag{9}$$

En la ecuación de cantidad de movimiento (2) el término que representa el cambio de la presión hidrostática entre dos secciones es $g\frac{\partial I_1}{\partial x}$, mismo que para una transición con sección prismática se evalúa de la forma siguiente:

$$g\frac{\partial}{\partial x}(I_1) = gA(x,t)\frac{\partial y}{\partial x} + gI_2(A;x,t)\,. \tag{10}$$

Sustituyendo la ecuación anterior en la ecuación de cantidad de movimiento (2), tenemos que:

$$\mathcal{M}(A,Q;x,t) = \frac{\partial Q}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{Q^2}{A}\right) + gA\frac{\partial y(A,x,t)}{\partial x} + gA\left[S_f(Q,A;x,t) - S_o\right] = 0\,. \tag{11}$$

El sistema de ecuaciones de Saint-Venant (ecuaciones (1) y (11)) representan un problema bien planteado de valor inicial y de valores en la frontera que está sujeto a las condiciones iniciales (Cunge, Holly, & Verwey, 1980).

Condiciones de frontera

Debido a que el sistema de ecuaciones de Saint-Venant (ecuaciones (1) y (11)) representa un problema bien planteado de valor inicial y de valores en la frontera. Es de suma importancia especificar las condiciones de frontera pues éstas definen el comportamiento del flujo en la condición transitoria. La ubicación de las condiciones de frontera se define por el tipo de régimen de flujo y son:

Régimen de flujo subcrítico

$$y(x_L) = y_L \quad ; \quad t = 0\,, \tag{12}$$

$$Q(x_0) = Q_0 \quad ; \quad t = 0\,. \tag{13}$$

Régimen de flujo supercrítico

$$y(x_o) = y_o \quad ; \quad t = 0\,, \tag{14}$$

$$Q(x_0) = Q_0 \quad ; \quad t = 0\,. \tag{15}$$

En este trabajo se estudiará un flujo en régimen subcrítico, entonces de acuerdo a lo anterior, es necesario definir una condición de frontera aguas arriba y una condición aguas abajo. Para la frontera aguas arriba se considerará la condición de gasto $Q(x_0) = Q_0$, definida por un gasto de ingreso y para la frontera aguas abajo se considerará un tirante $y(x_L) = y_L$.

Modelo de condición inicial

A partir de las ecuaciones (1) y (11) se obtiene la ecuación que describe el flujo en estado permanente. La condición inicial se tiene para $\frac{\partial\,(.)}{\partial t} = 0$, por lo que el principio de conservación de masa se cumple si y solo si no existen variaciones de gasto a lo largo de la conducción $\left(\frac{dQ}{dx} = 0 \; o \; Q_1 = Q_2\right)$, entonces las ecuaciones de Saint-Venant se expresan de la forma siguiente:

$$\mathcal{L}(A, Q; x, 0) = \frac{dQ}{dx} = 0\,, \tag{16}$$

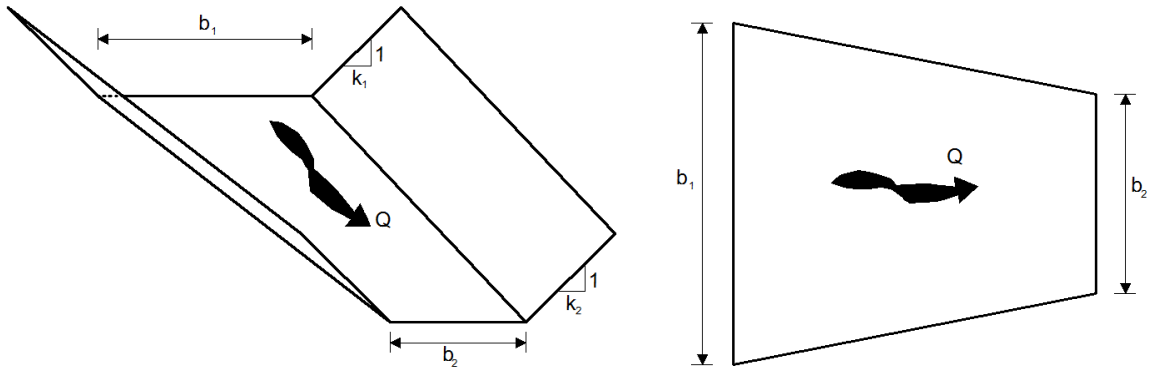
$$\mathcal{M}(A, Q; x, 0) = \frac{d}{dx}\left(\frac{Q^2}{A}\right) + gA(x)\frac{dy}{dx} + gA\left(S_f - S_o\right) = 0\,. \tag{17}$$

Desarrollando el primer término de la ecuación de cantidad de movimiento

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{Q^2}{A}\right) = \frac{2Q}{A}\frac{dQ}{dx} - \frac{Q^2}{A^2}\frac{dA}{dx} = -\frac{Q^2}{A^2}\frac{dA\left(y(x)\right)}{dx}\,. \tag{18}$$

En este análisis se evalúa el caso cuando la sección transversal tiene una variación gradual de la geometría en el espacio, como se muestra en la Figura 2, donde $b_1 \neq b_2$ y $k_1 \neq k_2$ y la función espacial de área se calcula de la forma siguiente:

$$A(x) = b(x)y(x) + k(x)y(x)^2\,. \tag{19}$$



a) b)

Figura 2. Características geométricas de un canal prismático con una transición. a) Vista isométrica. b) Vista en planta. Donde b_1 y b_2 es el ancho de plantilla al inicio y al final de la transición, k_1 y k_2 es el talud al inicio y al final de la transición respectivamente.

Aplicando la regla de la cadena al término $\frac{dA(y(x))}{dx}$ de la ecuación (18) (W. Jeppson, 1974), obtenemos:

$$\frac{dA(b,k,y(x))}{dx} = \frac{\partial A}{\partial b}\frac{db}{dx} + \frac{\partial A}{\partial k}\frac{dk}{dx} + \frac{\partial A}{\partial y}\frac{dy}{dx}. \tag{20}$$

Evaluando las derivadas de la ecuación anterior, se tiene

$$\frac{\partial A}{\partial b} = \frac{\partial}{\partial b}[\,by + ky^2] = y\,, \tag{21}$$

$$\frac{\partial A}{\partial k} = \frac{\partial}{\partial k}[\,by + ky^2] = y^2\,, \tag{22}$$

$$\frac{\partial A}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}[\,by + ky^2] = b + 2ky = B\,. \tag{23}$$

Sustituyendo las ecuaciones (21), (22) y (23) en (20) y a su vez en (18) se tiene

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{Q^2}{A}\right) = -\frac{Q^2}{A^2}\left[y\frac{db}{dx} + y^2\frac{dk}{dx} + B\frac{dy}{dx}\right]. \tag{24}$$

Finalmente sustituyendo la ecuación anterior en (17) y despejando el término que evalúa las variaciones de nivel de flujo a lo largo de toda la conducción $\frac{\partial y}{\partial x}$ se obtiene

$$\frac{dy}{dx} = \frac{S_o - S_f + \frac{Q^2}{gA^3}\left[y\frac{db}{dx} + y^2\frac{dk}{dx}\right]}{1 - Fr^2}\,, \tag{25}$$

Donde Fr, es el número de Froude y se evalúa de la forma siguiente (Chow, 1959):

$$Fr = \frac{U(x)}{\sqrt{g\frac{A(y;x)}{B(y;x)}}}\,, \tag{26}$$

Donde $U(x)$ es la velocidad de flujo y $B(y;x)$ es el ancho de la superficie libre del agua.

La ecuación (25) es conocida como la ecuación de flujo gradualmente variado en canales a superficie libre, pero incorpora los términos que evalúan la variación del nivel de flujo cuando existen transiciones a lo largo de la conducción, ya sea una ampliación, reducción o cambio en la forma geométrica de la sección transversal entre dos secciones. Si el canal tiene una forma regular (sin transiciones), $\frac{db}{dx} = \frac{dk}{dx} = 0$, la ecuación (25) se expresa de la forma siguiente:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{S_o - S_f}{1 - Fr^2}. \quad (27)$$

La ecuación anterior expresa la forma clásica de flujo gradualmente variado.
En las ecuaciones (25) y (27) cuando se tiene $Fr = 1$ se presenta una singularidad, entonces para solucionar este problema se tiene que considerar dos ramas de solución, cuando:

- $Fr > 1$, se tiene un flujo supercrítico y se debe plantear una condición de frontera aguas arriba del canal.
- $Fr < 1$, se tiene un flujo subcrítico y se debe plantear una condición de frontera aguas abajo del canal.

Las ecuaciones (25) y (27) son ecuaciones diferenciales ordinarias de primer orden, pero con términos altamente no lineales, tales como el término de fricción y el número de Froude. Para solucionar el problema planteado por las ecuaciones (25) y (27) se propone aplicar el método numérico de disparo inicial de Runge-Kutta de cuarto orden (RK4) (Neuman, 2001, Burden & Faires, 2002), considerando $y' + f(y; x) = 0$, entonces se tiene:

$$y_{i+1} = y_i + \frac{h}{6}[k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4], \quad (28)$$

Donde $k_i = f(y_i + \alpha_i; x_i)$ y α_i, términos de actualizado del método de RK4, para $\forall i = \{1, \cdots, 4\}$.

La condición de disparo inicial para el método de RK4, para un régimen de flujo subcrítico es definir un gasto $Q(x_0) = Q_0$ y el nivel del flujo al final del canal $y(x_L) = y_L$, en el caso de un flujo supercrítico se cambia el lugar de la evaluación del nivel hacia el inicio de la conducción.

Análisis y discusión de resultados

Pruebas del modelo de condición inicial

Se realizaron distintas pruebas con la que se demuestra el funcionamiento del modelo de condición inicial. Las pruebas que se realizaron fueron con un régimen de flujo subcrítico, en el que se definió un gasto Q_0 de ingreso y el tirante normal y_N como condición de frontera aguas arriba y aguas abajo respectivamente. En el Cuadro 1 se muestran los datos generales que se utilizaron en las pruebas numéricas.

Cuadro 1. Parámetros generales en las pruebas numéricas.

Parámetro	Unidades	Valor
Gasto	m^3/s	300
Pendiente del fondo del canal	$adim.$	0.0001
Coeficiente de rugosidad de Manning	$adim.$	0.014

Discretización espacial Δx en la zona de la transición	m	0.1
Discretización espacial Δx fuera de la zona de la transición	m	1.0

A continuación, se muestran las pruebas realizadas y los resultados obtenidos.

Prueba 1. Ampliación suave en conducción con sección trapezoidal

Descripción de la prueba:
Canal con sección trapezoidal con una ampliación suave de la sección transversal, con una longitud total de la conducción de $500\ m$ y la longitud de la transición es de $100\ m$. Las características geométricas de la sección inicial y final de la transición se describen en el Cuadro 2. Los resultados obtenidos en la condición inicial se muestran en la Figura 3.

Cuadro 2. Características geométricas de la transición para la prueba 1.

	Sección inicial	**Sección final**
Ancho del fondo (m)	50	60
Talud (adim)	1	2

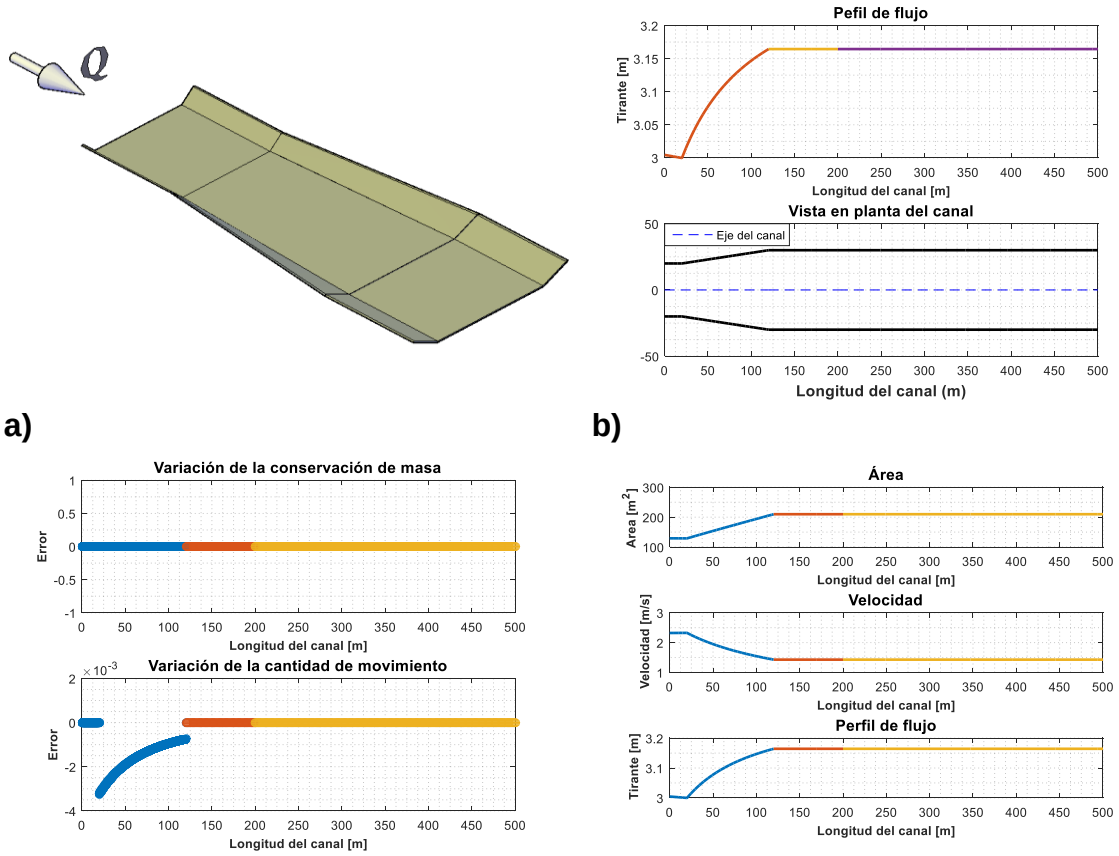


Figura 3. a) Esquema de una ampliación suave en una conducción con sección trapezoidal. b) Resultado de la condición inicial. Perfil de flujo. Vista en planta del ancho del fondo de la conducción. c) Comprobación de la condición inicial. Evaluación del error

en la conservación de masa y cantidad de movimiento. d) Variación del área y la velocidad.

Prueba 2. Reducción abrupta en conducción con sección rectangular

Descripción de la prueba:
Canal con sección rectangular con una reducción abrupta de la sección transversal, con una longitud total de la conducción de $400\ m$ y la longitud de la transición es de dm. Las características geométricas de la sección inicial y final de la transición se describen en el Cuadro 3. Los resultados obtenidos en la condición inicial se muestran en la Figura 4.

Cuadro 3. Características geométricas de la transición para la prueba 2.

	Sección inicial	**Sección final**
Ancho del fondo (m)	60	50

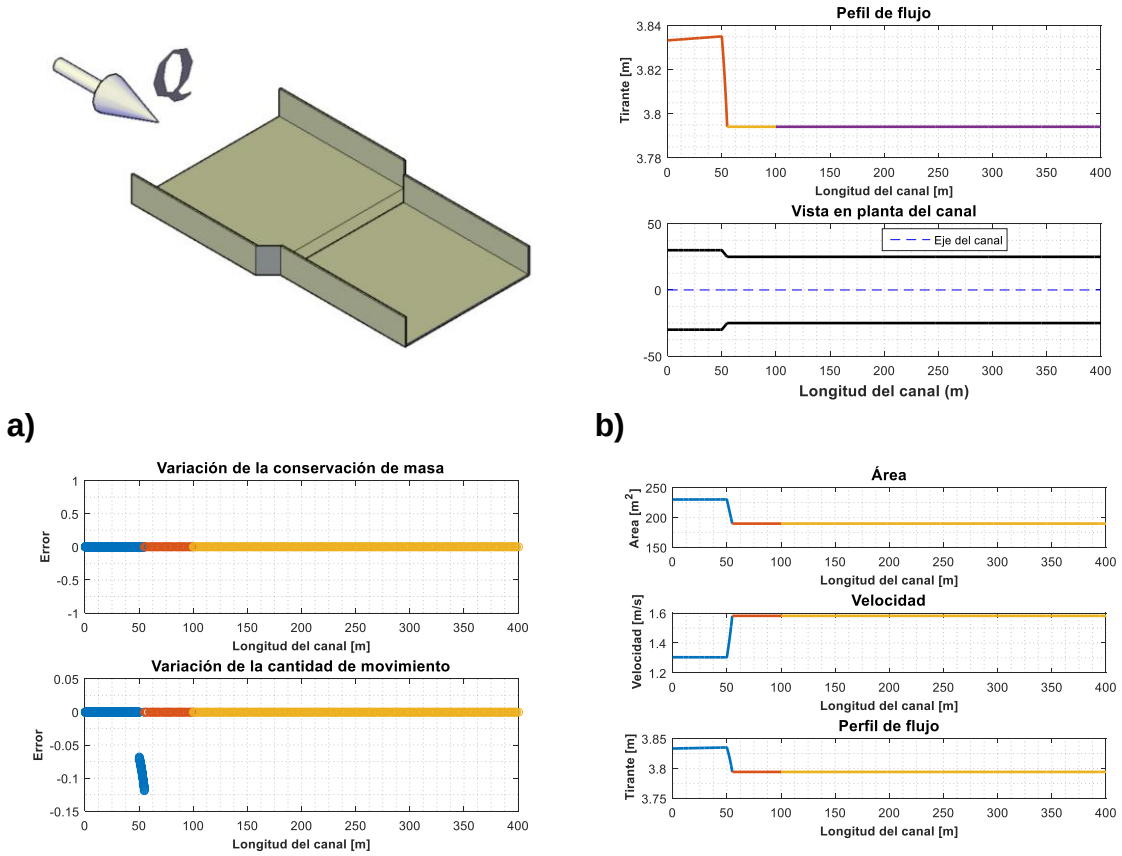


Figura 4. a) Esquema de una reducción abrupta en una conducción con sección rectangular. b) Resultado de la condición inicial. Perfil de flujo. Vista en planta del ancho del fondo de la conducción. c) Comprobación de la condición inicial. Evaluación del error en la conservación de masa y cantidad de movimiento. d) Variación del área y la velocidad.

Prueba 3. Cambio de sección de rectangular a trapezoidal

Descripción de la prueba:
Canal con una sección rectangular al inicio y una trapezoidal al final de la transición, con una longitud total de la conducción de $500\ m$ y la longitud de la transición es de $100\ m$. Las características geométricas de la sección inicial y final de la transición se describen en el Cuadro 4. Los resultados obtenidos en la condición inicial se muestran en la Figura 5.

Cuadro 4. Características geométricas de la transición para la prueba 3.

	Sección inicial	**Sección final**
Ancho del fondo (m)	50	50
Talud (adim)	0	3

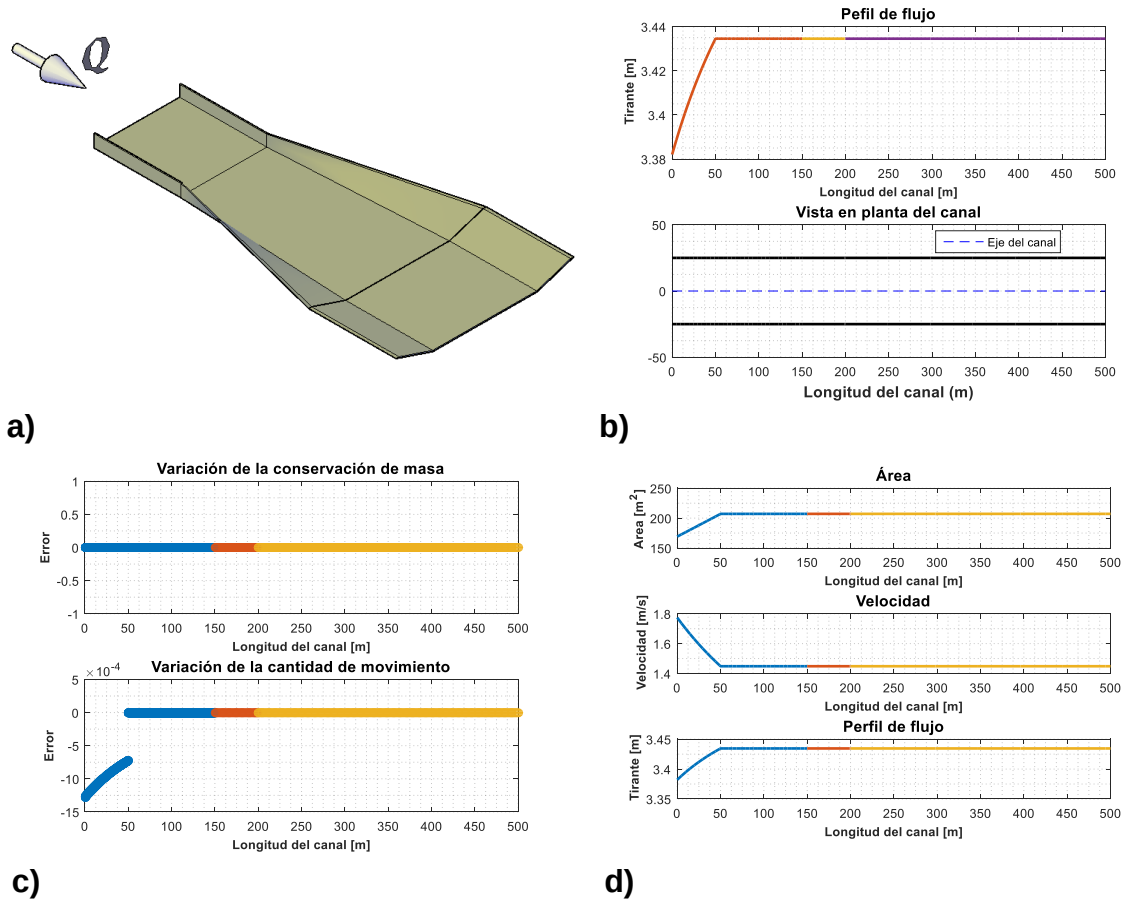


Figura 5. a) Esquema de un cambio de sección con una transición suave de rectangular a trapezoidal. b) Resultado de la condición inicial. Perfil de flujo. Vista en planta del ancho del fondo de la conducción. c) Comprobación de la condición inicial. Evaluación del error en la conservación de masa y cantidad de movimiento. d) Variación del área y la velocidad.

Conclusiones

Para el estudio del comportamiento del flujo en zonas de transiciones en conducciones a superficie libre, en este trabajo se construyó el modelo de condición inicial, obteniendo la ecuación dinámica de flujo gradualmente variado en zonas de transiciones a partir de las ecuaciones de conservación de masa y cantidad de movimiento de Saint-Venant considerando las condiciones de flujo en estado permanente y aplicado a una conducción prismática. En la literatura se pueden encontrar diferentes métodos para solucionar la ecuación de flujo gradualmente variado, en este trabajo se utilizó el método de Runge-Kutta de cuarto orden (RK4), debido a que evalúa cuatro puntos por paso, dando respuestas más exactas que otros métodos (Burden & Faires, 2002).

De acuerdo a los resultados que se obtuvieron se observa que al realizar la comprobación del perfil de flujo con la ecuación de cantidad de movimiento (ecuación (17)), el error es relativamente grande cuando la transición de la conducción es abrupta y menor cuando se tiene una transición suave.

Finalmente se concluye que fue posible desarrollar el modelo de condición inicial, solucionando la ecuación diferencial ordinaria no lineal de flujo gradualmente variado para conducciones con transiciones suaves y abruptas. El modelo discreto generado se utilizara para un modelo de flujo transitorio como la condición inicial.

Referencias bibliográficas

Abbott, M. (1979). *Computational Hydraulics. Elements of the Theory of Free Surface Flows.* Londres: PITMAN.

Burden, R., & Faires, J. (2002). *Análisis Numérico* (Septima ed.). Estados Unidos de América: Thomson Trad.

Chaudhry, M. (1986). *Applied Hydraulic Transients* (Segunda ed.). New York: Van Nostrand Reinhold Company.

Chow, V. T. (1959). *Open-Channel Hydraulics.* New York: Mc. Graw-Hill.

Cunge, J., Holly, F., & Verwey, A. (1980). *Practical Aspects of Computational River Hydraulics.* Londres: Pitman Publishing Limited.

Neuman, E. (2001). *Análisis Numérico de Integrales y Ecuaciones diferenciales* (Segunda ed.). Santa Fe, Argentina: Universidad Nacional del Litoral.

Sotelo Avila, G. (1997). *Apuntes de Hidráulica II.* México, D.F.: Facultad de Ingeniería, Universidad Nacional Autónoma de México.

W. Jeppson, R. (1974). *Simulation of Steady and Unsteady Flows in Channels and Rivers.* Utah: Utah State University.