SOLUCIÓN EN DIFERENCIAS FINITAS DE LA ECUACIÓN DE RICHARDS APLICANDO EL GRADIENTE CONJUGADO PARA PROBLEMAS NO LINEALES

LMA Juan Carlos Mota Escamilla

Dr. Carlos Alberto Chávez García

I CONGRESO NACIONAL COMEII 2015 DE RIEGO Y DRENAJE
23 Y 24 de noviembre de 2015
Jiutepec, Morelos

1. **Antecedentes**
2. **Ecuaciones**
    1. Ecuación de Richards
    2. Modelos de $C(\Psi)$ y $K(\Psi)$ utilizados
3. **Discretización temporal**
    1. Propiedades de la discretización
    2. Método explícito e implícito en la discretización temporal.
    3. Gradiente congugado no lineal para el método implícito
4. **Resultados**

Ecuaciones (Richards)

Ecuación de Richards en una dimensión espacial:

$$C(\Psi)\frac{\partial \Psi}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial z}\left(K(\Psi)\left(\frac{\partial \Psi}{\partial z} - 1\right)\right)$$

- z es la profundidad
- t es el tiempo
- $\Psi = \Psi(z, t)$ es la presión en el tiempo t y profundidad z
- C es la capacidad específica
- K es la conductividad hidráulica

Ecuaciones (Contenido de humedad)

Ecuación de Van Genutchen que relaciona el contenido de agua con la presión:

$$\boldsymbol{\theta}(\Psi) = \begin{cases} \boldsymbol{\theta_r} + \dfrac{\boldsymbol{\theta_s} - \boldsymbol{\theta_r}}{\left(\mathbf{1} + \left(\dfrac{\Psi}{\Psi_{\boldsymbol{d}}}\right)^{\boldsymbol{n}}\right)^{\boldsymbol{m}}} & \Psi < \mathbf{0} \\ \boldsymbol{\theta_s} & \Psi \geq \mathbf{0} \end{cases}$$

- $\boldsymbol{\theta_s}$ **y** $\boldsymbol{\theta_r}$ **son los contenidos de humedad a saturación y residual respectivamente**
- $\boldsymbol{m}$ **y** $\boldsymbol{n}$ **son parámetros de forma**
- $\Psi_{\boldsymbol{d}}$ **es una valor característico del suelo**
- $\boldsymbol{\theta}$ **es el contenido de humedad dada una presión** Ψ

Ecuaciones (Conductividad hidráulica)

Ecuación de Brooks y Corey para la conductividad hidráulica:

$$\boldsymbol{K(\theta) = K_s \left(\frac{\theta - \theta_r}{\theta_s - \theta_r}\right)^{\eta}}$$

- $\boldsymbol{\theta_s}$ **y** $\boldsymbol{\theta_r}$ **son los contenidos de humedad a saturación y residual respectivamente**
- $\boldsymbol{K_s}$ **es la conductividad hidráulica a saturación**
- $\boldsymbol{\eta}$ **es un parámetro de forma**

Discretización temporal

Haciendo $t = \{t_0, t_1, \ldots, t_n\}$, la ecuación de Richards se transforma en la siguiente ecuación:

$$C(\Psi(t_k))\frac{\partial \Psi(t_k)}{\partial t_k} = \frac{\partial}{\partial z}\left(K(\Psi(t_k))\left(\frac{\partial \Psi(t_k)}{\partial z} - 1\right)\right)$$

Solucionando con el método explícito el operador $\frac{\partial \Psi(t_k)}{\partial t_k}$:

$$C(\Psi(t_k))\frac{\Psi(t_{k+1}) - \Psi(t_k)}{t_{k+1} - t_k} = \frac{\partial}{\partial z}\left(K(\Psi(t_k))\left(\frac{\partial \Psi(t_k)}{\partial z} - 1\right)\right)$$

Observar que $\Psi(t_k)$ es el vector de presiones en el tiempo t_k

Discretización temporal

Del método explícito se obtiene una regla de recurrencia para encontrar $\Psi(t_k)$ dado $\Psi(t_{k-1})$:

$$\Psi(t_{k+1}) = \frac{t_{k+1} - t_k}{C\big(\Psi(t_k)\big)} \frac{\partial}{\partial z}\left(K\big(\Psi(t_k)\big)\left(\frac{\partial \Psi(t_k)}{\partial z} - 1\right)\right) + \Psi(t_k)$$

El método explícito no puede ser usado en las profundidades z_i si $C\big(\Psi(t_k, z_i)\big) = 0$

Discretización temporal

Usando el método implícito, la ecuación de Richards se transforma en la siguiente ecuación:

$$C(\Psi(t_k))\frac{\Psi(t_k)-\Psi(t_{k-1})}{t_k-t_{k-1}}=\frac{\partial}{\partial z}\left(K(\Psi(t_k))\left(\frac{\partial\Psi(t_k)}{\partial z}-1\right)\right)$$

En los puntos z_i donde $C(\Psi(t_k,z_i))=0$ si se puede utilizar el método implícito. Sin embargo la ecuación anterior no puede ser resuelta directamente para $\Psi(t_k)$, por lo que hay que utilizar algún método de optimización.

Gradiente conjugado no lineal

El algoritmo "Gradiente conjugado no lineal" requiere una función de error a minimizar, en este caso se utiliza la ecuación del modelo implícito. La función de error $E\left(\Psi(t_k)\right)$ queda definida como:

$$\boldsymbol{E}\left(\Psi(t_k)\right) = \left\| C\left(\Psi(t_k)\right)\frac{\Psi(t_k) - \Psi(t_{k-1})}{\Delta t_k} - \frac{d}{dz}\left(K\left(\Psi(t_k)\right)\left(\frac{d\Psi(t_k)}{dz} - 1\right)\right)\right\|$$

Gradiente conjugado no lineal

Paso 1: Se escoge $x_0 = \Psi(t_k)$

Paso 2: $\Delta x_0 = -\nabla_x E(x_0)$ **para los puntos donde** $C(x_0) = 0$

Paso 3: $\alpha_0 = \arg\min_{\alpha}\left(E(x_0 + \alpha \cdot \Delta x_0)\right)$

Paso 4: $x_1 = x_0 + \alpha_0 \cdot \Delta x_0$

Paso 5: $s_0 = \Delta x_0$

Del el paso 1 al paso 5 es la parte donde básicamente se inicia s_0

Gradiente conjugado no lineal

Paso 6: $\Delta x_n = -\nabla_x E(x_n)$ **para los puntos donde** $C(x_n) = 0$

Paso 7: $\beta = \frac{{\Delta x_n}^T \cdot \Delta x_n}{{\Delta x_{n-1}}^T \cdot \Delta x_{n-1}}$

Paso 8: $s_n = \Delta x_n + \beta \cdot s_{n-1}$

Paso 9: $\alpha_n = \arg\min_{\alpha}\left(E(x_n + \alpha \cdot \Delta x_n)\right)$

Paso 10: $x_{n+1} = x_n + \alpha_n \cdot s_n$

Por último se escoge x_{n+1} **como la solución a las presiones en el tiempo** k**, obsérvese que solo aplica para los puntos donde** $C(x_n) = 0$**.**

Discretización espacial

Para las derivadas espaciales (lado derecho de la ecuación) se utilizan los esquemas de diferencia finita centrada e interpolación con polinomios. La aproximación con polinomios permite aplicar derivadas de "cualquier" orden (fraccional o entera) sobre las derivadas espaciales.

Obsérvese que el método tampoco hace inferencia sobre la dimensión de Ψ. Heciendo que este método sea útil para Richards 2D y 3D.

Resultados

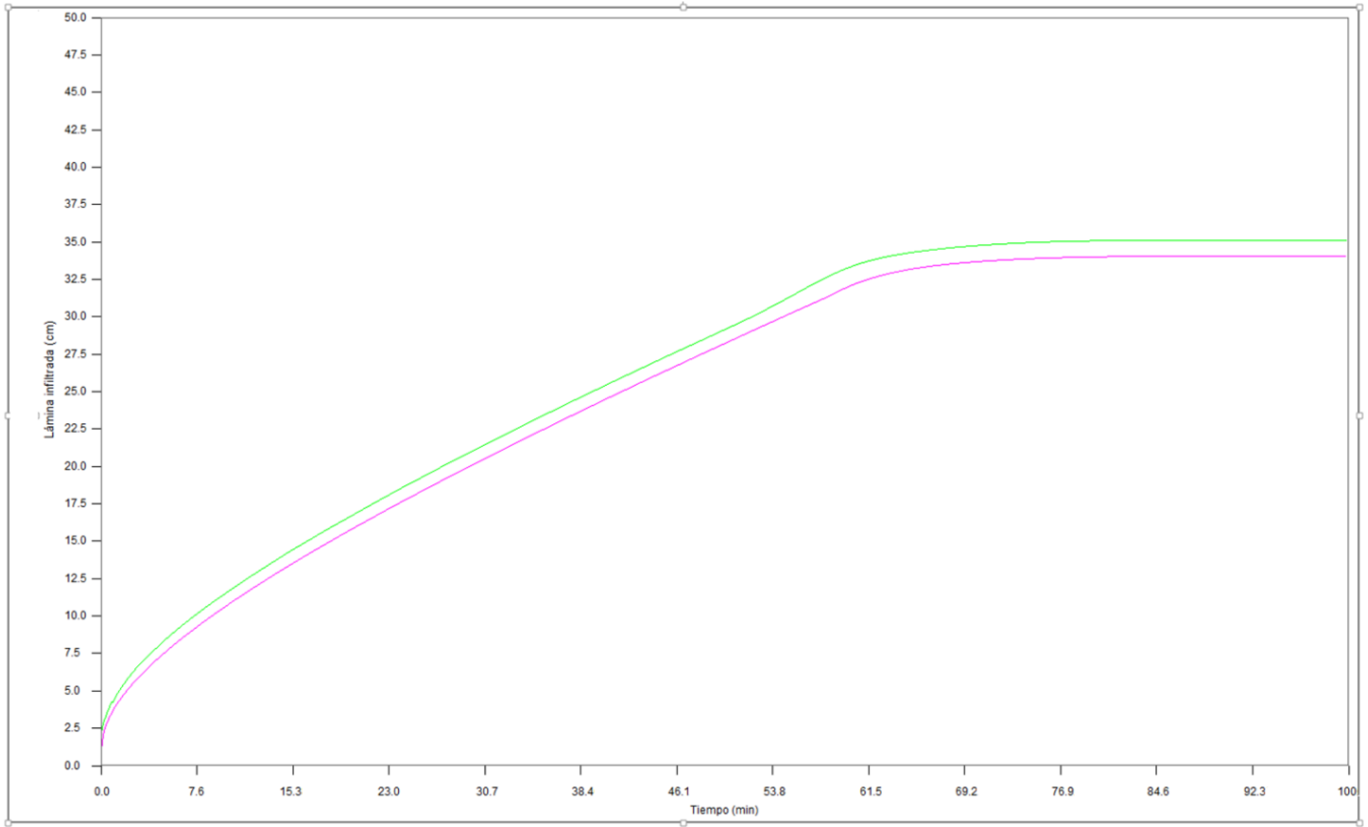

Figura 1. Evolución temporal de dos láminas infiltradas con los mismos parámetros físicos y diferentes discretizaciones.
Parámetros físicos: $\theta s=0.45$, $\theta r=0.0$, $\Psi cte=4.5$, $\Psi ini=0.012$, $m=0.381$, $\eta=3.63$.
Verde: $\Delta z=3.125$, $\Delta t=.001$, tiempo de simulación: .5 segundos.
Magenta: $\Delta z=.75$, $\Delta t=.0001$, tiempo de simulación 20 segundos.

Resultados

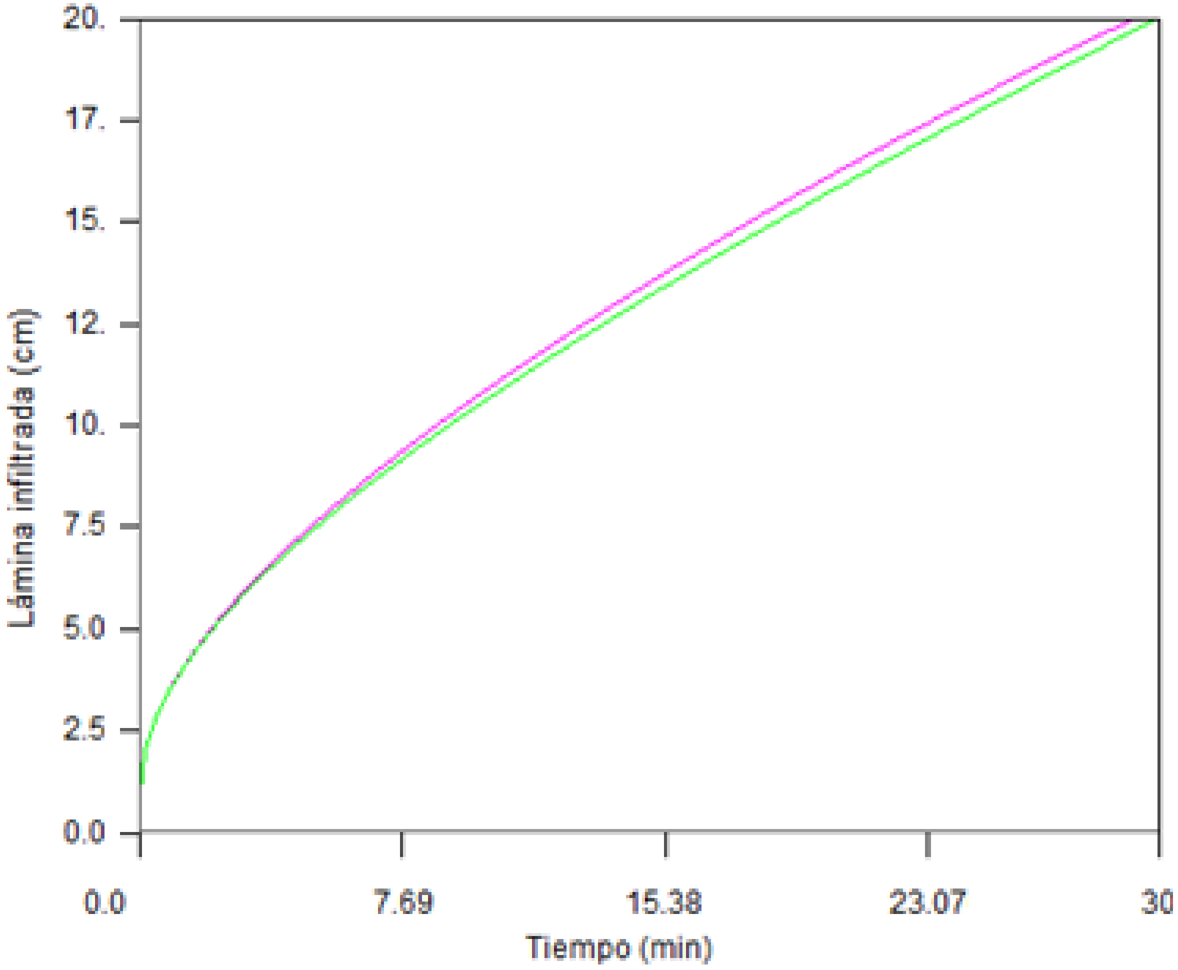

Figura 2. (Verde) Simulación de la ecuación de Richards.
(Magenta) Simulación de la ecuación de Richards con derivada fraccionaria igual a 0.98 en la expresión $d\Psi dz$.

Resultados

t	L. I.	t	L. I.	t	L. I.	t	L. I.
1	2.69	16	12.99	31	20.39	46	26.55
2	4.03	17	13.44	32	20.83	47	26.99
3	5.04	18	14	33	21.17	48	27.44
4	5.71	19	14.45	34	21.62	49	27.89
5	6.5	20	15.01	35	22.18	50	28.23
6	7.17	21	15.68	36	22.51	51	28.67
7	7.84	22	16.13	37	22.96	52	29.12
8	8.51	23	16.69	38	23.3	53	29.46
9	9.18	24	17.14	39	23.75	54	29.79
10	9.86	25	17.59	40	24.19	55	30.13
11	10.42	26	18.15	41	24.53	56	30.58
12	10.98	27	18.59	42	24.98	57	30.91
13	11.54	28	18.93	43	25.43		
14	12.1	29	19.38	44	25.76		
15	12.55	30	19.94	45	26.1		

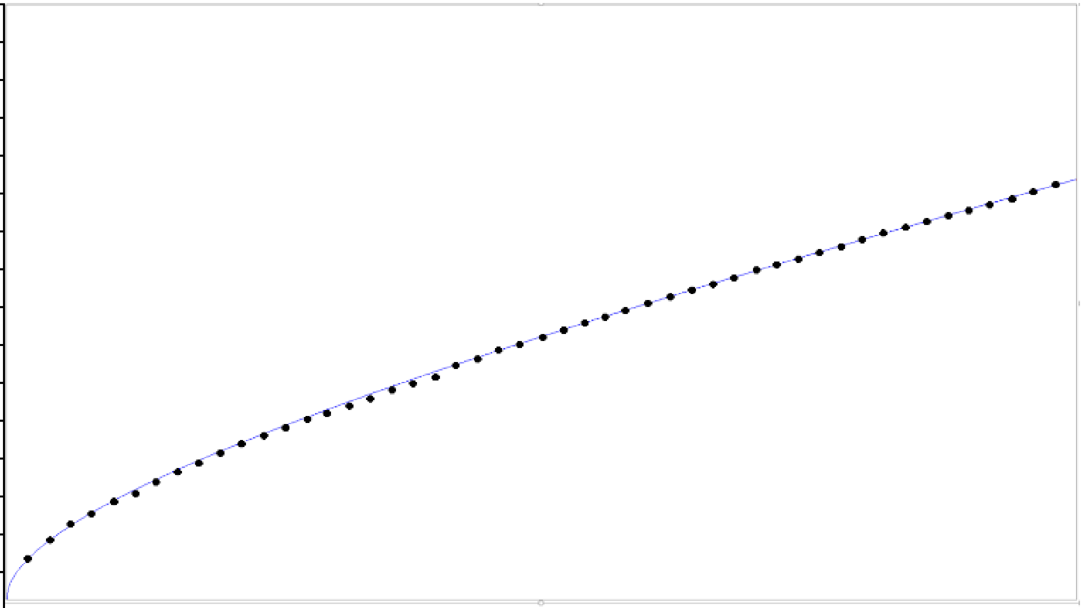

Figura 3. (Izq.)Tabla con los datos de infiltración a optimizar, L.I. es la lámina infiltrada y t es el tiempo en minutos.
(Derecha) Gráfica que resulta al aplicar el algoritmo de Levenberg–Marquardt, después de dos minutos y cinco iteraciones.
Los parámetros de inicio son $\Psi d=-10$ y $Ks=.3$, Los parámetros finales son $\Psi d=-18.6$ y $Ks=.325$

Bibliografía

Darcy, H. 1856. Les fontaines publiques de la ville de Dijon. Dalmont, Paris.

Marquardt, D.W., 1963. An algorithm for least-squares estimation of nonlinear parameters. SIAM J. Appl. Math. 11: 431-441.

Laasonen, P. 1949. Über eine Methode zur Lösung der Warmeleitungsgleichung, Acta Math., 81: 309-317.

Richards, L.A. 1931. Capillary conduction of liquids through porous mediums. Physics, 1: 318-333.

Saint-Venant, A.J.C. Barre De. 1871. Théorie du mouvement non permant des eaux, avec application aux crues des rivières et à l’introduction des marées dans leur lits. Comptes rendus des séances de l’Academie des Sciences, 73: 147-154 y 237-240.

Van Genuchten, M.Th. 1980. A closed-form equation for predicting the hydraulic conductivity of unsaturated soils. Soil Sci. Soc. Am. J., 44: 892-898.

Gracias

Enlace a la presentación:
http://1drv.ms/1PTgfsZ