



Artículo: COMEII-15001

I CONGRESO NACIONAL COMEII 2015

Reunión anual de riego y drenaje

Jiutepec, Morelos, México, 23 y 24 de noviembre

MODELACIÓN DE LA REDISTRIBUCIÓN DEL AGUA DURANTE Y DESPUÉS DE UN EVENTO DE RIEGO POR GRAVEDAD CON LA ECUACIÓN DE RICHARDS

Carlos Chávez¹, Antonio Quevedo¹, Carlos Fuentes²

¹ Facultad de Ingeniería, Universidad Autónoma de Querétaro, C.U. Cerro de las Campanas, 76010, Querétaro, México.

² Coordinación de Riego y Drenaje. Instituto Mexicano de Tecnología del Agua, 62550 Jiutepec, Morelos, México.

Resumen

El proceso de infiltración del agua en el suelo es de gran interés en la agricultura, su conocimiento ayuda a planificar de una mejor manera los tiempos de riego y las láminas por aplicar en los momentos que requiere el cultivo. La ecuación diferencial que describe la transferencia de agua en los suelos es la ecuación de Richards, que es difícil integrarla de manera analítica en la mayoría de condiciones iniciales y de frontera de interés práctico debido a su naturaleza altamente no lineal. Esta situación conduce al uso de métodos numéricos para su integración y su aplicación en la simulación de la evolución del perfil de humedad y la lámina infiltrada durante el riego por gravedad, y en la simulación de la redistribución del agua después del riego debido al campo gravitacional, la evaporación del agua a través de la superficie del suelo y a la transpiración de los cultivos. En este trabajo se estudia la solución numérica de la ecuación que describe la infiltración del agua en el suelo aplicando el método de diferencias finitas. La solución en diferencias finitas se realiza con esquemas de balance local, como un caso especial se expone el método de Laasonen. La solución encontrada es usada para simular problemas de transferencia de agua durante y después del riego por gravedad para observar los fenómenos de infiltración, evaporación, transpiración y percolación.

Palabras clave: Infiltración, métodos numéricos, simulación, variabilidad espacial.



Introducción

La ecuación general de transferencia de agua en el suelo, resulta de la combinación de la ecuación de continuidad que se deriva del principio de conservación de la masa:

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} = \nabla \cdot [K(\psi) \nabla \psi] - \frac{dK}{d\psi} \frac{\partial \psi}{\partial z} - \Upsilon \quad (1)$$

De la combinación de la ecuación de continuidad que resulta del principio de conservación de la masa se tiene la ecuación 2:

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{q} + \Upsilon = 0 \quad (2)$$

y de la ley de Darcy (1856), argumentada experimentalmente, se obtiene la ecuación dinámica que resulta del principio de la cantidad de movimiento:

$$\mathbf{q} = -K(\psi) \nabla H, \quad H = \psi - z \quad (3)$$

donde θ es el contenido volumétrico de agua, también denominado contenido de humedad; $\mathbf{q} = (q_x, q_y, q_z)$ es el caudal de agua por unidad de superficie de suelo, o flujo de Darcy, con sus componentes en las direcciones del espacio (x, y, z) ; t es el tiempo; Υ es un término de fuente o sumidero como el volumen de agua extraído por las plantas por unidad de volumen de suelo en el tiempo; H es el potencial hidráulico o carga hidráulica, siendo igual a la suma del potencial de presión (ψ), el cual es negativo en la zona no saturada del suelo y positivo en la zona saturada, y del potencial gravitacional asimilado a la coordenada vertical orientada positivamente hacia abajo (z); K es la conductividad hidráulica del suelo parcialmente saturado y depende de la presión o del contenido de humedad. Las relaciones $\theta(\psi)$ y $K(\psi)$ son llamadas características hidrodinámicas del suelo.

La ecuación diferencial contiene aparentemente dos variables dependientes: el contenido de humedad y la presión del agua, estas están relacionadas a través de la curva de retención. Con la introducción de la capacidad específica definida como la pendiente de la curva de retención:

$$C(\psi) = \frac{d\theta}{d\psi} \quad (4)$$

es decir:



$$\frac{\partial \theta}{\partial t} = C(\psi) \frac{\partial \psi}{\partial t} \quad (5)$$

en la ecuación sólo aparece la presión como variable dependiente y es conocida como la ecuación de Richards (1931).

En cuanto a la representación analítica de las características hidrodinámicas, siguiendo a Fuentes *et al.* (1992), se utiliza la combinación de las características hidrodinámicas de Fujita (1952) y Parlange *et al.* (1982) en estudios teóricos para la construcción de soluciones analíticas exactas; y en estudios experimentales se utiliza la combinación de la curva de retención propuesta por van Genuchten (1980), considerando la restricción de Burdine (1953), con la curva de conductividad hidráulica propuesta por Brooks y Corey (1964), debido a que satisfacen las propiedades integrales de la infiltración y facilitan la identificación de los parámetros. En este trabajo, se presenta la solución de la ecuación diferencial unidimensional vertical de Richards (1931):

$$C(\psi) \frac{\partial \psi}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial z} \left[K(\psi) \left(\frac{\partial \psi}{\partial z} - 1 \right) \right] - \Upsilon \quad (6)$$

que resulta de la combinación de la ecuación de continuidad:

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} + \frac{\partial q_z}{\partial z} = -\Upsilon \quad (7)$$

y de la ley de Darcy:

$$q_z = K(\psi) - K(\psi) \frac{\partial \psi}{\partial z} \quad (8)$$

Materiales y métodos

Solución en diferencias finitas mediante un balance local de masa

Para construir la solución numérica, se utiliza el esquema propuesto por Zataráin *et al.* (1998). De acuerdo con el algoritmo, el perfil del suelo es dividido en capas Δz que pueden ser no constantes. El sistema resultante es no lineal puesto que los coeficientes obtenidos dependen de la propia solución. Por lo tanto, la resolución para cada paso de tiempo es iterativa. El primer estimador puede ser obtenido mediante el esquema de Laasonen (1949), que resulta al considerar que los coeficientes, la capacidad específica y la conductividad hidráulica, se calculan en el tiempo precedente mientras que el gradiente hidráulico se calcula en el tiempo actual. El método es implícito de manera parcial y el algoritmo resultante ya no es iterativo en un paso de tiempo. El sistema obtenido forma una matriz tridiagonal, es resuelto de manera eficiente mediante un algoritmo de



eliminación gaussiana conocido como algoritmo de Thomas o de doble barrido. Los coeficientes en el sistema dependen de la propia presión, éstos se actualizan y se vuelve a aplicar el algoritmo hasta que el siguiente estimador de la solución en un tiempo dado sea igual, dado un criterio de error, al estimador precedente. La convergencia puede ser acelerada si se utilizan algoritmos de segundo orden como el método de Newton para encontrar las presiones en un paso de tiempo dado. Para poder solucionar el sistema son necesarias las condiciones iniciales y de frontera.

Condiciones de frontera

Las condiciones de frontera pueden ser agrupadas en tres tipos: de Dirichlet (primer tipo), de Neumann (segundo tipo) y de Robbins (tercer tipo). En este trabajo se tiene un particular interés en la condición de Dirichlet en la frontera superior. En esta condición se conoce el valor de la variable dependiente de la ecuación diferencial para todo tiempo en la superficie del suelo (presión) que se introduce en la solución numérica. Para la frontera inferior se debe tener en consideración la longitud de la columna. En una columna semi-infinita la presión corresponde a la condición inicial. En una columna finita se introduce la presión en la posición de la base de la columna para iniciar con el barrido hacia atrás.

La solución analítica de la infiltración

La solución analítica utilizada en este trabajo es la construida a partir de la difusividad de Fujita (1952) y de la relación conductividad hidráulica-difusividad hidráulica de Parlange *et al.* (1982):

$$D(\theta) = \frac{(K_s - K_0)\lambda_c}{\theta_s - \theta_0} \frac{1 - \alpha}{(1 - \alpha\theta)^2}; \quad 0 < \alpha < 1 \quad (9)$$

$$K(\theta) = K_0 + (K_s - K_0) \frac{\Theta [1 - \beta + (\beta - \alpha)\Theta]}{1 - \alpha\Theta}; \quad 0 < \beta < 1 \quad (10)$$

donde α y β son parámetros de forma, K_s la conductividad hidráulica a saturación, Θ el grado de saturación $\Theta = \theta - \theta_0 / \theta_s - \theta_0$, y λ_c es la escala de Bouwer (1964) definida por:

$$\lambda_c = \frac{1}{K_s - K_0} \int_{\theta_0}^{\theta_s} D(\theta) d\theta \quad (11)$$

Se debe notar que la difusividad de Fujita contiene los comportamientos extremos, ya que con $\alpha = 0$ se tiene una difusividad constante y cuando $\alpha \rightarrow 1$ la difusividad se asimila a una densidad de Dirac; el comportamiento de los suelos es más cercano del último que del primero. En el caso de una densidad de Dirac la relación de concentración de flujos es igual al grado de saturación.



Resultados

Comparación de la solución numérica con la solución analítica

La comparación entre la solución numérica y la solución analítica se lleva a cabo en un suelo de Montecillo, Estado de México, cuya clasificación textural americana es un suelo franco arenoso; el suelo fue caracterizado hidrodinámicamente con el método del drenaje interno por Cano (1990). De acuerdo con Fuentes *et al.* (2011) los valores de los parámetros de las características de Fujita y Parlange son: $\theta_s = 0.520 \text{ cm}^3/\text{cm}^3$, $\theta_0 = 0.185 \text{ cm}^3/\text{cm}^3$, $|\psi_c| = 13.5 \text{ cm}$, $|\psi_s| = 0 \text{ cm}$, $K_s = 2.5 \text{ cm/h}$, $K_0 = 0 \text{ cm/h}$, $\alpha = 0.969$, $\beta = 0.998$.

Del comportamiento en tiempos cortos de la solución de la infiltración bajo las condiciones de estudiadas se puede deducir una relación entre los pasos de espacio y tiempo. En tiempos cortos $I = S\sqrt{t}$, de modo que en el primer paso de tiempo $I \approx \Delta z \Delta \theta$ y $t = \Delta t$, donde $\Delta \theta = \theta_s - \theta_0$, y ya que $S^2 \approx 2(K_s - K_0)\lambda_c \Delta \theta$ se tiene que los pasos de tiempo y espacio deben ser tales que el parámetro adimensional sea del orden de la unidad (Zataráin *et al.*, 1998).

$$m = \frac{2(K_s - K_0)\lambda_c}{\Delta \theta} \frac{\Delta t}{(\Delta z)^2} \quad (12)$$

En la Figura 1 se muestra la comparación entre la solución numérica en diferencias finitas de la ecuación de Richards y la solución analítica de Parlange *et al.* (1982). Los resultados son similares si el parámetro interpolador en el tiempo (ω) es cercano de la unidad, es decir si el esquema es totalmente implícito.

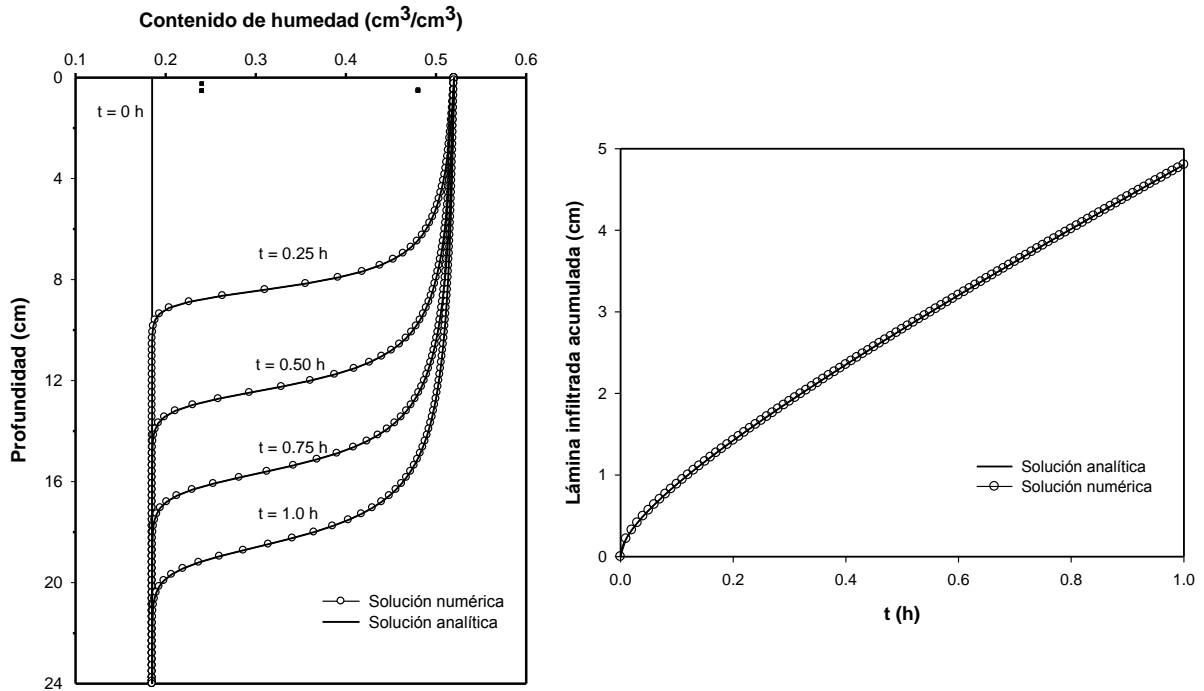


Figura 1. Perfiles de humedad y la lámina infiltrada obtenidos con las soluciones numérica y analítica de la infiltración en un suelo franco arenoso de Montecillo, México.

La infiltración en un evento de riego

La simulación numérica de la infiltración, redistribución y evaporación del agua en una columna de un suelo en Montecillo, Estado de México se realiza con las características hidrodinámicas de van Genuchten (1980), para la curva de retención, y de Brooks y Corey (1964) para la curva de conductividad hidráulica.

La curva de retención propuesta por van Genuchten (1980) se escribe como:

$$\frac{\theta(\psi) - \theta_r}{\theta_s - \theta_r} = \left[1 + \left(\frac{\psi}{\psi_d} \right)^n \right]^{-m} \quad (13)$$

donde θ_s es el contenido volumétrico de agua a saturación, θ_r es el contenido volumétrico de agua residual, ψ_d es un valor característico de la presión del agua en el suelo, m y n son dos parámetros de forma empíricos relacionados aquí por la restricción de Burdine (1953): $m = 1 - 2/n$, con $0 < m < 1$ y $n > 2$.

La conductividad hidráulica propuesta por Brooks y Corey (1964) es la siguiente:



$$K(\theta) = K_s \left(\frac{\theta - \theta_r}{\theta_s - \theta_r} \right)^\eta \quad (14)$$

donde η es un parámetro de forma positivo.

De acuerdo con la metodología propuesta por Fuentes (1992), los parámetros θ_s , θ_r , m y η de las ecuaciones (13) y (14) se estiman a partir de la porosidad y la curva granulométrica y los parámetros K_s y ψ_d mediante la aplicación de un procedimiento inverso de modo de reproducir la fase de avance en una prueba de riego con las ecuaciones de Barré de Saint-Venant y Richards, en una melga con un suelo franco arenoso en Montecillo, México. Los valores son los siguientes: $\theta_s = 0.4865 \text{ cm}^3/\text{cm}^3$, $\theta_r = 0.0 \text{ cm}^3/\text{cm}^3$, $m = 0.125$, $n = 2.2857$ y $\eta = 11.0$; $\psi_d = -32.75 \text{ cm}$ y $K_s = 1.84 \text{ cm/h}$.

Los contenidos de humedad a punto de marchitamiento permanente (θ_{PMP}) y a capacidad de campo (θ_{CC}) se estiman como los que corresponden a las presiones de agua $\psi_{\text{PMP}} = -15300 \text{ cm}$ y $\psi_{\text{CC}} = -340 \text{ cm}$ respectivamente, así: $\theta_{\text{PMP}} = 0.0840 \text{ cm}^3/\text{cm}^3$ y $\theta_{\text{CC}} = 0.2492 \text{ cm}^3/\text{cm}^3$. El contenido de humedad inicial a la que debe estar el suelo para llevar a cabo el riego se calcula como $\theta_0 = \theta_{\text{PMP}} + F_{\text{ap}} (\theta_{\text{CC}} - \theta_{\text{PMP}})$, donde F_{ap} es el factor de agotamiento permisible del cultivo, por ejemplo $F_{\text{ap}} = 1/3$, con los valores anteriores se obtiene $\theta_0 = 0.1391 \text{ cm}^3/\text{cm}^3$. La presión del agua sobre la superficie es tomada igual al tirante medio $h = 1.5 \text{ cm}$. La lámina neta de riego se calcula como $(\theta_{\text{CC}} - \theta_{\text{PMP}})P_r$, donde P_r es el espesor del perfil de suelo considerado; para una profundidad de 70 cm la lámina neta es de 7.71 cm lo que corresponde, con una eficiencia de aplicación de 83.3%, a una lámina bruta de 9.25 cm, la cual es aplicada en un tiempo de riego de 86 minutos. En la Figura 2 se presentan los resultados de la simulación numérica.

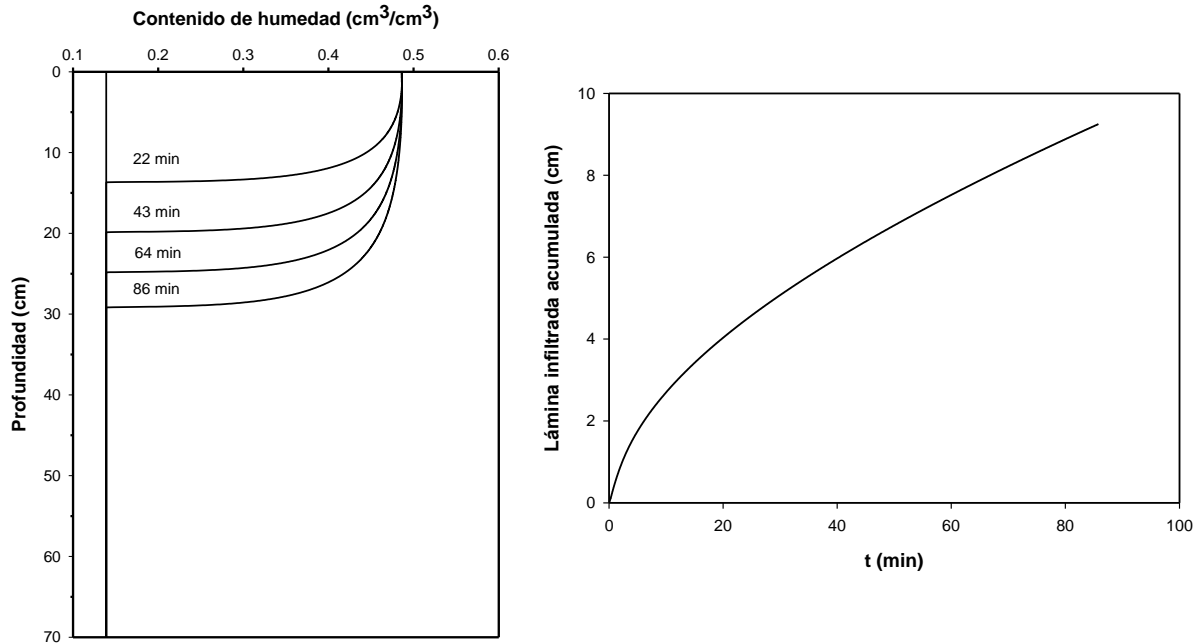


Figura 2. Infiltración del agua durante el primer riego en un suelo franco arenoso en Montecillo, México.

Los procesos de evaporación y la transpiración

Para calcular los parámetros de la armónica se considera que la lámina de agua evaporada media anual es $Ev_a = 1168 \text{ mm}$, lo que proporciona una lámina media diaria $Ev_d = 3.2 \text{ mm/d}$ y una lámina media horaria $\bar{e}_v = 0.13 \text{ mm/h}$. La selección de $\bar{e}_{vm} = 0 \text{ mm/h}$ conduce a $e_{vM} = 0.27 \text{ mm/h}$. Si se toma el origen del tiempo a la medianoche entonces se puede tomar $t_M = 15 \text{ h}$ como el tiempo donde la tasa de evaporación horaria es máxima. La evaporación como condición de frontera se introduce como una condición de Neumann en la frontera superior haciendo $q_z|_1^{k+1} = -e_v(t_{k+1})$.

En cuanto a la transpiración, existen diferentes posibilidades como los modelos que incluyen la densidad de las raíces o leyes de tipo Ohm. Con fines de ilustración se toma el término de sumidero estudiado por Fuentes *et al.* (2011), a saber:

$$Y = -\frac{\gamma}{\lambda_c} K(\psi) \frac{\partial \psi}{\partial z} \quad (15)$$

donde γ es un coeficiente adimensional que refleja la demanda de agua por el sumidero: se toma para el ejemplo $\gamma = 0.015$. La escala de Bouwer (1964) está definida por:

$$\lambda_c = \frac{1}{K_s} \int_{-\infty}^0 K(\psi) d\psi \quad (16)$$



Con las características hidrodinámicas definidas por las ecuaciones (13) y (14) se calcula como:

$$\lambda_c = |\psi_d| \frac{1}{n} B\left(\eta m - \frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right) \quad (17)$$

donde $B(p,q) = \Gamma(p)\Gamma(q)/\Gamma(p+q)$ es la función beta completa, con $p > 0$ y $q > 0$, y $\Gamma(x)$ la función gamma completa de Euler. Para el suelo franco arenoso en estudio $\lambda_c = 33.95$ cm.

Dentro del esquema de balance local, la forma discreta de la ecuación (15) es la siguiente:

$$\Upsilon_j^{k+\omega} = -\frac{\gamma K_j^{k+\omega}}{\lambda_c \Delta z_j} (\psi_{j+\gamma_z}^{k+\omega} - \psi_{j-1+\gamma_z}^{k+\omega}) \quad (18)$$

donde $K_j^{k+\omega} = K(\psi_j^{k+\omega})$.

En la Figura 3 se muestra la evolución del perfil de humedad después de un riego, debida a la redistribución causada por el campo gravitacional, a la evaporación a través de la superficie del suelo, a la transpiración por el cultivo y a la percolación en la base de la columna de control del suelo franco arenoso en Montecillo, México. En la Figura 4 se muestra la evolución de las láminas acumuladas correspondientes en función del tiempo en el perfil de control del suelo. A un mes del riego el contenido medio de humedad es de $\bar{\theta} = 0.2060 \text{ cm}^3/\text{cm}^3$ el cual debe continuar descendiendo en el tiempo para alcanzar el contenido medio de humedad inicial $\theta_0 = 0.1391 \text{ cm}^3/\text{cm}^3$ para así aplicar el segundo riego, sin embargo, este perfil medio de humedad se está tomando hasta los 60 cm de profundidad, por lo que se debe de tener especial cuidado a la hora de elegir la profundidad de mojado y la profundidad de las raíces.

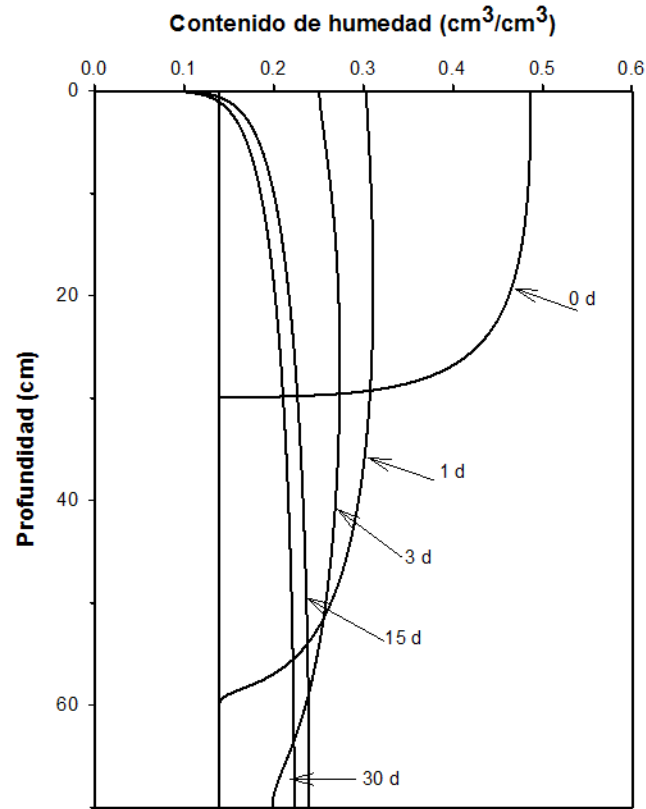


Figura 3. Redistribución del agua después de un riego en el perfil del suelo franco arenoso en Montecillo, México.

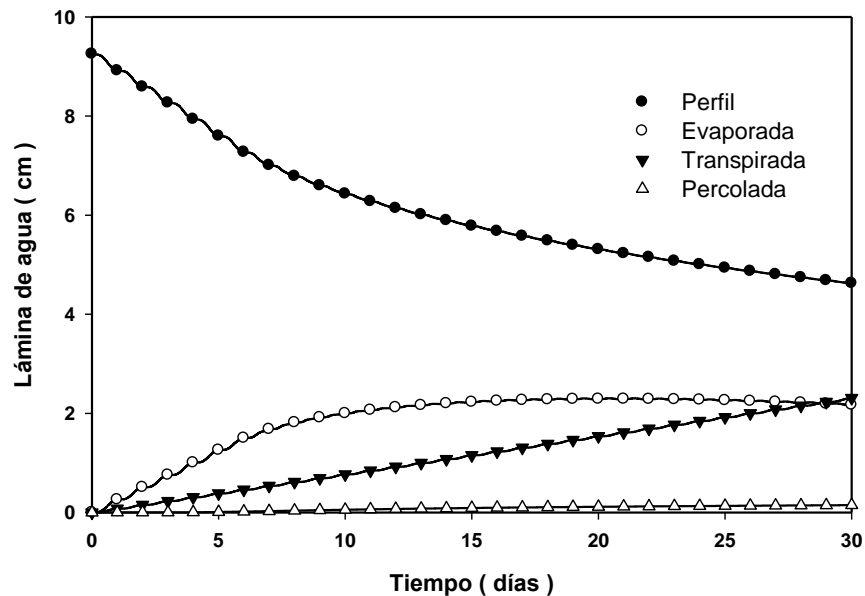


Figura 4. Láminas acumuladas de agua en función del tiempo en el perfil de control del suelo, evaporada, transpirada y percolada después de un riego en el suelo franco arenoso en Montecillo, México.



Conclusiones

La ecuación diferencial que describe las transferencias de agua en el suelo se integra de manera analítica en pocas condiciones iniciales y de frontera de interés práctico, como en una columna semi-infinita de suelo con un contenido de humedad inicial constante y una condición de humedad también constante en su frontera superior. Las soluciones son similares si el esquema se toma cercano o igual a un esquema totalmente implícito.

Con la solución numérica se ha ilustrado la evolución del perfil de humedad y la lámina infiltrada durante un riego en un suelo de textura franco arenosa de Montecillo, Estado de México. También se ha ilustrado la evolución del perfil de humedad después del riego, es decir la redistribución de la humedad debido al campo gravitacional, a la evaporación del agua a través de la superficie del suelo y a la transpiración de las plantas con un modelo simplificado del término de sumidero, haciendo posible que se puedan observar los fenómenos que ocurren en un evento de riego por gravedad: infiltración, evaporación, transpiración y percolación.

Finalmente, esta herramienta desarrollada puede ayudar en toma de decisiones en los calendarios de riego que se generan para los cultivos en específico, no obstante, es necesario calibra el modelo con datos medidos en campo de la evaporación y transpiración, para obtener mejores resultados.

Referencias

- Bouwer, H. 1964. Rapid field measurement of air entry value and hydraulic conductivity of soil as significant parameters in flow system analysis. *Water Resources Research*, 36: 411-424.
- Brooks, R.H., A.T. Corey. 1964. Hydraulic properties of porous media. *Hydrol. Pap. 3*, Colo. State Univ., Fort Collins.
- Burdine, N.T. 1953. Relative permeability calculations from pore-size distribution data, *Petroleum Trans.*, 198: 71-78.
- Cano, M.A. 1990. Caracterización hidrodinámica del suelo in situ y cálculo de percolación y evapotranspiración en riego por goteo. Tesis de Maestría en Ciencias. Centro de Hidrociencias del Colegio de Postgraduados. Montecillo, México.
- Darcy, H. 1856. *Les fontaines publiques de la ville de Dijon*. Dalmont, Paris.
- Fuentes, C. 1992. *Approche fractale des transferts hydriques dans les sols non-saturés*. Tesis de Docteur de l'Université Joseph Fourier, Mention Mécanique. Grenoble, Francia. 267 p.
- Fuentes, C., C. Chávez, H. Saucedo, M. Zavala. 2011. Sobre una solución exacta de la ecuación Fokker-Planck con término de sumidero. *Tecnología y Ciencias del Agua*, 2(1): 117-132.
- Fuentes, C., R. Haverkamp, J.-Y. Parlange. 1992. Parameter constraints on closed-form soil-water relationships. *J. of Hydrology*, 134: 117-142.



- Fujita, H. 1952. The exact pattern of a concentration-dependent diffusion in a semi-infinite medium, part II. *Textile Research Journal*, 22: 823-827.
- Laasonen, P. 1949. Über eine Methode zur Lösung der Wärmeleitungsgleichung, *Acta Math.*, 81: 309-317.
- Parlange, J.-Y., R.D. Braddock, I. Lisle, R.E. Smith. 1982. Three parameter infiltration equation. *Soil Sci.*, 111: 170-174.
- Richards, L.A. 1931. Capillary conduction of liquids through porous mediums. *Physics*, 1: 318-333.
- Van Genuchten, M.Th. 1980. A closed-form equation for predicting the hydraulic conductivity of unsaturated soils. *Soil Sci. Soc. Am. J.*, 44: 892-898.
- Zataráin F., C. Fuentes, V.O.L. Palacios, E.J. Mercado, F. Brambila, N. Villanueva. 1998. Modelación del transporte de agua y de solutos en el suelo. *Agrociencia*, 32(4): 373-383.